A. Hydr.
467

A. Flyer.

467

Dambrowsky

THEORIE UND ANLEITUNG

ZUR PRACTISCHEN AUSFÜHRUNG DER RATIONELLEN

INHALTS-BERECHNUNG

BEI DEN ERDBAUTEN,

BESONDERS DER EISENBAHNEN.

VON

EMANUEL VON DAMBROWSKI,

VERMESSUNGS-REVISOR UND INGENIEUR.

MIT 11 LITHOGRAPHIRTEN TAFELN.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1876.

22 B

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Vorwort.

Der Geometer kann durch Messen und Nivelliren zwar niemals ein mathematisch richtiges, aber immerhin ein annähernd richtiges Material für die Berechnung des Inhaltes von Eisenbahn-, Chaussee-, Canal-Körpern, sowie Seitenentnahmen (auch Füllgruben genannt) gewinnen. Bei der Verwerthung dieses Materials zu den Berechnungs-Arbeiten wird nun durch die Anwendung von Annäherungs-Methoden häufig eine sehr viel grössere Unrichtigkeit der Resultate herbeigeführt, wie durch die Aufnahme im Felde nothwendig bedingt ist. Dieses könnte doch nur dann einigermassen gerechtfertigt erscheinen, wenn eine richtigere Behandlung des Gegenstandes einen zu dem Erfolg nicht in angemessenem Verhältniss stehenden Zeitaufwand erfordern würde. In dieser Richtung werde hier darauf hingewiesen, dass hinsichtlich, der Inhalts-Berechnung des Eisenbahnkörpers, ohne Berücksichtigung des Quergefälles, die Anwendung der rationellen Methode zwar bei jedem Bahnkörper-Abschnitt etwas mehr Rechnen-Arbeit erfordert, wie die Anwendung der empirischen Methoden, dass diese Arbeitsvermehrung aber meistens durch Arbeitsverminderung in anderer Beziehung mehr wie ausgeglichen werden kann, insofern als (wie in der folgenden Materie speciell nachgewiesen wird) auch bei ganz stetigem Fallen oder Steigen des Terrains, nur durch nahes Aneinanderlegen der Profilpunkte, exorbitanten Fehlern bei der empirischen Inhalts-Berechnung vorgebeugt wird, während bei Anwendung der rationellen Methode das nahe Aneinanderlegen der Profilpunkte nur dann nöthig ist, wenn die Hauptbrechpunkte des Terrains solches erforderlich machen; mit dem Zunehmen der Profilpunkte wächst aber das Arbeitsquantum. Im Uebrigen sind in dem Folgenden geeigneten Orts Vergleiche in Bezug auf den Zeitaufwand gemacht worden.

Wenn das Ziel, bei nicht zu grossem Zeitaufwand richtige Resultate bei der Jnhalts-Berechnung zu erhalten, in der Praxis erreicht werden soll, so muss der die Feldarbeiten ausführende Geometer mit

der Theorie des Gegenstandes umfassend vertraut sein; denn durch nicht rationelle mechanische Ausführung der Feldarbeit wird mindestens eine unnöthige Vermehrung der Arbeiten herbeigeführt. Bezüglich der Behandlung der Feldarbeit ist auch das Erforderliche dargestellt worden.

Einige Körper, die in stereometrischen Lehrbüchern nicht berücksichtigt sind, namentlich solche mit windschiefer Oberfläche, hat Unterzeichneter speciell abgehandelt, und ist dies die Grundlage für die practischen Zwecke geworden.

Für jede der verschiedenen Aufgaben bei der Inhalts-Berechnung sind mannigfaltige Annäherungs-Methoden gebräuchlich; dieselben sind beschrieben, und ihr Werth unter Vergleichung mit der rationellen Methode speciell geprüft worden.

Noch ist hervorzuheben, dass die Vorarbeiten der rationellen Inhalts-Berechnung in Bezug auf die Zeichnen-Arbeit, ein Material geben, welches zur sichern Feststellung des Grunderwerbs sehr geeignet ist, insofern als jene Methode in den Fällen, wo das Quergefälle berücksichtigt werden muss, die Darstellung des Eisenbahnkörpers im Grundriss bedingt.

Bromberg, den 10. April 1875.

Emanuel von Dambrowski.

Inhalt.

Seite

A. Berechnung der Erdmassen für Eisenbahn- und Wege-Körper bei Terrain-Verhältnissen, die das Berücksichtigen des Quergefälles nicht bedingen. Dazu gehören die Paragraphen 1 bis 13.

§ 1. Ableitung einer Formel für die Inhalts-Berechnung 7
§ 2. Zwei empirische Inhalts-Berechnungs-Methoden 8
§ 3. Theoretische Beleuchtung der empirischen Methode *a* 8
§ 4. Theoretische Beleuchtung der empirischen Methode *b* 9
§ 5. Zweite Formel für die Inhalts-Berechnung 10
§ 6. Beispiele zu den vorhergehenden Paragraphen und sich an jene knüpfende Folgerungen 11
§ 7. Inhalts-Berechnung des Bahnkörpers in Curven. 13
§ 8. Erweiterung des Abtragsprofils wegen variabeler Grabentiefe. 14
§ 9. Vernachlässigung event. Berücksichtigung der Werthe $\frac{d^2}{4}$ in Formel 1. und $\frac{d^2}{8}$ in Formel 4. bei Gräben 15
§ 10. Schema für die Erdmassen-Berechnung des Bahnkörpers, und auf jenes sich beziehende Bemerkungen 16
§ 11. Wie gestalten sich die beiden Formeln für die Inhalts-Berechnung, wenn die Böschungen des Normalprofils nicht das Neigungsverhältniss 1 : 1,5, sondern allgemein das Neigungsverhältniss 1 : *n* haben? . . . 18
§ 12. Folgerungen aus dem vorhergehenden Paragraphen 19
§ 13. Bemerkung in Bezug auf die supergenerelle Inhalts-Berechnung. . . 19

B. Inhalts-Berechnung des Eisenbahn-Körpers bei Terrain-Verhältnissen, die das Berücksichtigen des Quergefälles erforderlich machen. Dazu gehören die Paragraphen 14 bis 30.

§ 14. Wie zeigt sich der Einfluss des Quergefälles des Terrains auf die Inhalts-Berechnung? 20
§ 15. In welcher Weise ändert sich der Einfluss des Quergefälles des Terrains auf die Inhalts-Berechnung bei der Aenderung des Neigungsverhältnisses des Terrain-Gefälles in der Quere?. 21
§ 16. Die Kronenbreite des Bahnkörpers etc. sei variabel und die Werthe für die Höhen und für das Quergefälle seien constant 23

Seite

§ 17. Die Höhe des Querprofils sei variabel, die übrigen Factoren seien constant 24
§ 18. Welchen Einfluss auf die Inhalts-Berechnung hat das Quergefälle des Terrains, wenn das Längenprofil nicht in der Mitte des Bahnkörpers liegt? 25
§ 19. Wie ändert sich der Einfluss des Quergefälles des Terrains, wenn die Böschungen des Bahnkörpers geringer oder stärker wie 1 : 1,5 geneigt sind? 30
§ 20. Ein Körper, dessen normaler Querschnitt ein Rechteck oder Parallelogramm ist, und dessen Oberfläche eine windschiefe Fläche ist . . . 32
§ 21. Ein Körper, dessen normaler Querschnitt ein Paralleltrapez, und dessen Oberfläche eine windschiefe Fläche ist 37
§ 22. Ein Körper, dessen normaler Querschnitt ein radial abgegrenzter Theil einer Ringfläche, und dessen Oberfläche eine windschiefe Fläche ist . 48
§ 23. Ein Körper, dessen 4 Seitenflächen, von denen 2 Theile von Cylinderflächen und 2 Ebenen sind, paarweise parallel zu einander sind, und dessen Oberfläche eine windschiefe Fläche ist 50
§ 24. Rationelle Inhalts-Berechnung des Eisenbahn-Körpers. Zerlegung des Bahnkörper-Abschnittes in einen Mittelkörper und zwei seitliche Pyramiden. Einfluss der Windschiefe der resp. Terrainflächen-Abschnitte auf die Inhalts-Berechnung der seitlichen Pyramiden 51
§ 25. Der Bahnkörper-Abschnitt wird durch Profile abgegrenzt, von denen das eine nur Auftrag, das andere Abtrag und Auftrag enthält . . . 59
§ 26. Vergleichung der verschiedenen Annäherungs-Methoden für die Inhalts-Berechnung, mit der rationellen Methode 61
§ 27. Modification der rationellen Inhalts-Berechnungs-Methode, wenn ausser dem Grundriss des Bahnkörpers auch die Querprofile gezeichnet werden 72
§ 28. Art der Aufnahme der rechtwinkelig zur Bahnachse liegenden Querprofile 73
§ 29. Inhalts-Berechnung auf Grund schräge zur Bahnachse aufgenommener Querprofile nebst Schema für die rationelle Inhalts-Berechnung des Bahnkörpers überhaupt, wenn das Quergefälle zu berücksichtigen ist 81
§ 30. Inhalts-Berechnung des Bahnkörpers in Curven 88

C. Seitenentnahmen (Füllgruben). Dazu gehören die Paragraphen 31 bis 33.

§ 31. Allgemeines über die Form der Seitenentnahmen und über die Art der nivellitischen Arbeiten Behufs Ermittelung des Inhaltes der ausgeschachteten Erdmassen 90
§ 32. Inhalts-Bestimmung der Seitenentnahmen durch Querprofile 91
§ 33. Inhalts-Bestimmung der Seitenentnahmen durch Netz-Nivellements . 95
Als Anhang zu Abschnitt A gehörig, eine Tabelle 101

A.

Berechnung der Erdmassen für Eisenbahn- und Wege-Körper, bei Terrain-Verhältnissen, die das Berücksichtigen des Quergefälles nicht bedingen (siehe § 14 bis 19).

§ 1.

Ableitung einer Formel für die Inhalts-Berechnung.

Der Damm-Körper Fig. 1 wird zerlegt in: 1. Das Prisma, dessen Grundfläche *BCED* ist, 2. den Keil, dessen Grundfläche *GHED* ist, 3. die beiden gleich grossen dreiseitigen Pyramiden, deren Grundflächen *ADG* und *EHP* sind.

Dann ist der Inhalt des ganzen Körpers

$$I = \left[f + (b + 3h_1)\,\frac{d}{2} + \frac{3}{2}d \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{2}{3}\right] e, \text{ dafür}$$

$$I = \left[\frac{f}{2} + \frac{f}{2} + (b + 3h_1)\,\frac{d}{2} + \frac{d^2}{2}\right] e, \text{ und}$$

$$\text{da } \frac{3}{4}d^2 - \frac{3}{4}d^2 = 0$$

$$I = \left[\frac{f}{2} + \frac{f}{2} + (b + 3h_1)\,\frac{d}{2} + \frac{3}{4}d^2 - \frac{3}{4}d^2 + \frac{d^2}{2}\right] e.$$

Nach Profil $I-K$ ist

$$f + (b + 3h_1)\,d + \frac{3}{2}d \cdot \frac{d}{2} \cdot 2 = F, \text{ oder}$$

$$f + (b + 3h_1)\,d + \frac{3\,d^2}{2} = F, \text{ daher}$$

$$\frac{f}{2} + (b + 3h_1)\,\frac{d}{2} + \frac{3}{4}d^2 = \frac{F}{2},$$

dieser Werth für $\frac{F}{2}$ ist in der letzten Gleichung für I enthalten, und es ist daher

$$I = \left(\frac{f}{2} + \frac{F}{2} - \frac{3}{4}d^2 + \frac{d^2}{2}\right) e.$$

Formel 1. $$I = \left(\frac{f}{2} + \frac{F}{2} - \frac{d^2}{4}\right) e.$$

Ist der Erdkörper ein Prisma, so ist $h = h_1$, folglich $h - h_1 = d = 0$, $\frac{f}{2}$ ist dann $= \frac{F}{2}$, und es ist in dem Falle

Formel 2. $$I = F \cdot e.$$

Bei den Durchgängen vom Auftrag zum Abtrag, und umgekehrt, ist $h_1 = 0$, dann ist $h - h_1 = h - 0 = h = d$, $\frac{f}{2}$ ist dann ebenfalls $= 0$, und es ist in diesem Falle

Formel 3. $$I = \left(\frac{F}{2} - \frac{h^2}{4}\right) e.$$

§ 2.

Zwei empirische Inhalts-Berechnungs-Methoden.

Empirisch werden die Erdmassen für Dämme und Einschnitte unter Benutzung von Tabellen auf die Weise berechnet, dass man entweder

a) zu den Auftrags- resp. Abtragshöhen h und h_1 des Längen-Profils, aus der Tabelle die zugehörigen Flächeninhalte entnimmt, von denselben das arithmetische Mittel bildet, und mit der Länge e des Körpers dasselbe multiplicirt, oder

b) zu dem arithmetischen Mittel der Auftrags- resp. Abtragshöhen den Flächen-Inhalt des Profils aus der Tabelle entnimmt, und denselben mit e multiplicirt. Bei Erdmassen-Berechnungen für Eisenbahnen ist diese Methode die übliche.

§ 3.

Theoretische Beleuchtung der empirischen Methode *a*.

Nach dieser Inhalts-Berechnungs-Methode ist

$$I = \frac{F + f}{2} \cdot e.$$

F, der Inhalt des grösseren Profils ist zusammengesetzt aus den Inhalten der Grundflächen der verschiedenen Körper, in welche wir bei Ableitung der mathematischen Formel den Bahnkörper-Abschnitt zerlegt gedacht haben.

Nennen wir den Inhalt jeder der Grundflächen (Fig. 1) *AGD* und *PHE* der Pyramiden, k; der Grundfläche *BCED* des Prismas, wie in § 1 f; der Grundfläche *GHED* des Keils, g; so ist $F = 2k + f + g$; und diesen Werth in die Gleichung für I eingesetzt, giebt

$$I = \frac{2k + 2f + g}{2} \cdot e, \text{ oder}$$

$$I = \frac{2k \cdot e}{2} + \frac{2f + g}{2} \cdot e.$$

Der Ausdruck $\frac{2f + g}{2} \cdot e$ für die Inhalte des Prismas und des Keils, ist mathematisch richtig; denn $\frac{2f}{2} \cdot e = f \cdot e$ ist der richtige Werth für den Inhalt des Prismas, und $\frac{g}{2} \cdot e$ ist der richtige Werth für den Inhalt des Keils.

Der erste Theil der Gleichung für I, $\frac{2k \cdot e}{2} = k \cdot e$ als Werth des Inhaltes der beiden Pyramiden, ist nicht richtig; der richtige Werth für diesen Inhalt ist:

$$2 \cdot k \cdot \frac{e}{3} = \frac{2}{3} k \cdot e.$$

Der Fehler beträgt: $k \cdot e - \frac{2}{3} k \cdot e = \frac{1}{3} k \cdot e$, und zwar ist dieser Fehler im positiven Sinne.

Nehmen wir in der Mitte von e ein Zwischenprofil an, so dass der Bahnkörper-Abschnitt in 2 Theilkörper zerlegt wird, so hat jeder dieser Theilkörper die Länge $\frac{e}{2}$, und es ist dann jede der Grundflächen der Pyramiden nur $= \frac{k}{4}$ (weil bei der Pyramide die mit der Grundfläche parallelen Schnittflächen sich wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze der Pyramide, verhalten), und der Fehler ist dann bei jedem der beiden Theilkörper $= \frac{1}{3} \cdot \frac{k}{4} \cdot \frac{e}{2} = \left(\frac{1}{3} k \cdot e\right) \frac{1}{8}$, bei dem ganzen Bahnkörper-Abschnitt darnach $= \left(\frac{1}{3} k \cdot e\right) \frac{1}{8} \cdot 2 = \left(\frac{1}{3} k \cdot e\right) \frac{1}{4}$.

Werden 2 Zwischenprofile angenommen, so, dass 3 Theilkörper entstehen, so ist jede der Grundflächen der Pyramiden $= \frac{k}{9}$, und jeder der Theilkörper hat die Länge $\frac{e}{3}$. Der Fehler ist dann bei jedem der 3 Theilkörper $= \frac{1}{3} \frac{k}{9} \cdot \frac{e}{3} = \left(\frac{1}{3} k \cdot e\right) \frac{1}{27}$, bei dem ganzen Bahnkörper — Abschnitt darnach $= \left(\frac{1}{3} k \cdot e\right) \frac{1}{27} \cdot 3 = \left(\frac{1}{3} k \cdot e\right) \frac{1}{9}$.

(Dass die 6 Pyramiden gleich gross sind, ist aus dem Grundriss der Fig. 1 ersichtlich, worin die beiden Zwischenprofil-Ebenen und die 6 Pyramiden punktirt angedeutet sind.)

Aus dem Vorstehenden folgt, dass der durch falsche Berechnung der seitlichen Pyramiden, bei Anwendung der empirischen Methode *a*, entstehende Fehlerwerth im quadratischen Verhältniss mit der Anzahl der gleichen Theile, in welche der Bahnkörper-Abschnitt durch Zwischenprofile zerlegt wird, abnimmt.

§ 4.

Theoretische Beleuchtung der empirischen Methode *b*.

Bei dieser Methode wird für den Bahnkörper-Abschnitt ein Prisma substituirt, dessen Grundfläche die Profilfläche in der Mitte des Bahnkörper-Abschnittes, und dessen Länge die Länge des Bahnkörper-Abschnittes

ist. Dieses Prisma ist aus zwei dreiseitigen Prismen und einem zwischen den beiden dreiseitigen Prismen liegenden sechsseitigen Prisma zusammengesetzt. Dieser Mittelkörper ist an Inhalt gleich der Summe der Inhalte von zweien der 4 Theilkörper, in welche wir den Bahnkörper-Abschnitt Fig. 1 bei der Ableitung der mathematischen Formel zerlegt haben, nehmlich, gleich dem Inhalte des Prismas mit der Grundfläche f + dem Inhalte des Keils mit der Grundfläche g; denn die Grundfläche jenes sechsseitigen Prismas ist $= f + \frac{g}{2}$, die Länge $= e$, folglich der Inhalt desselben $= \left(f + \frac{g}{2}\right) e$; dies ist aber auch der Ausdruck für den Inhalt des Prismas mit der Grundfläche f + dem Inhalt des Keils mit der Grundfläche g.

Um nachzuweisen inwieweit die Resultate der qu. Annäherungsmethode von den Resultaten der mathematisch richtigen Berechnungsweise abweichen, kommt es nunmehr nur noch darauf an, zu untersuchen, ob die beiden dreiseitigen Prismen, welche bei der Annäherungsmethode für die dreiseitigen Pyramiden des Bahnkörper-Abschnittes substituirt werden, diesen an Inhalt gleich sind, oder inwieweit diese Inhalte von einander abweichen.

Jene dreiseitigen Prismen haben zur Grundfläche die mittlere Querschnittsfläche der dreiseitigen Pyramiden; diese Fläche ist aber $= \frac{k}{4}$, der Inhalt der beiden Prismen ist daher $= 2 \cdot \frac{k}{4} \cdot e = \frac{1}{2} k \cdot e$.

Der Inhalt der beiden Pyramiden ist aber $= \frac{2}{3} k \cdot e$, der Fehler ist daher $= \frac{2}{3} k \cdot e - \frac{1}{2} k \cdot e = \frac{1}{6} k \cdot e$, und zwar ist derselbe im negativen Sinne, und es ist dieser Fehler halb so gross und im entgegengesetzten Sinne wie der Fehler, den wir bei der empirischen Methode a nachgewiesen haben.

Wenn aber dieser Fehler stets halb so gross ist, wie der Fehler bei Anwendung der empirischen Methode a, so muss derselbe auch im quadratischen Verhältniss mit der Anzahl der gleichen Theile, in welche der Bahnkörper-Abschnitt zerlegt wird, abnehmen, wie wir dies bei Methode a nachgewiesen haben.

§ 5.

Zweite Formel für die Inhalts-Berechnung.

Wir haben soeben nachgewiesen, dass der Inhalt des Damm-Abschnittes Fig. 1 richtig ermittelt ist, wenn zu dem Resultat, welches die Anwendung der Methode b ergiebt, $\frac{1}{6} k \cdot e$ hinzugefügt wird. Bei

dieser Methode wird aber die Querschnittsfläche für die Mitte des Damm-Abschnittes, wir wollen diese Querschnittsfläche F_1 nennen $\left(\text{für die Höhe } \frac{h+h_1}{2}\right)$, mit der Länge e des Damm-Abschnittes multiplicirt; darnach ist $I = F_1 \cdot e + \frac{1}{6} k \cdot e$, k ist eine der Grundflächen der beiden Pyramiden und $= \frac{3}{2} d \cdot \frac{d}{2} = \frac{3}{4} d^2$, daher $I = F_1 \cdot e + \frac{3 d^2 \cdot e}{6 \cdot 4}$

Formel 4. $$I = \left(F_1 + \frac{d^2}{8}\right) e.$$

§ 6.

Beispiele zu den vorhergehenden Paragraphen und sich an jene knüpfende Folgerungen.

Vergleichen wir nun an Beispielen, wie sich die Resultate bei Anwendung jeder der 3 Methoden herausstellen.

Es sei nach Fig. 1. $b = 5{,}0$ M., $h = 8{,}0$ M., $h_1 = 2{,}0$ M., $e = 100{,}0$ M., dann ist bei Anwendung der mathematisch richtigen Formel 1.

$$\frac{f}{2} = \frac{5{,}0 + 5{,}0 + 3 \cdot 2{,}0}{2 \cdot 2} \cdot 2{,}0 = 8{,}0 \text{ □M.}$$

$$\frac{F}{2} = \frac{5{,}0 + 5{,}0 + 3 \cdot 8{,}0}{2 \cdot 2} \cdot 8{,}0 = 68 \text{ □M.}$$

$$d = 8{,}0 - 2{,}0 = 6{,}0.$$

$$\frac{d^2}{4} = \frac{36}{4} = 9{,}0 \text{ □M.}$$

daher $I = (8{,}0 + 68{,}0 - 9{,}0)\ 100{,}0 = 6700{,}0$ Cubkm.

Nach der Methode *sub a* ist

$$f = \frac{5{,}0 + 5{,}0 + 3 \cdot 2{,}0}{2} \cdot 2{,}0 = 16 \text{ □M.}$$

$$F = \frac{5{,}0 + 5{,}0 + 3 \cdot 8{,}0}{2} \cdot 8{,}0 = 136 \text{ □M.}$$

$I = \frac{16{,}0 + 136{,}0}{2} \cdot 100{,}0 = 7600{,}0$ Cubikmeter; daher $7600{,}0 - 6700{,}0 =$ 900 Cubikmeter zu viel, oder $\frac{100 \cdot 900{,}0}{6700{,}0} = pptr.\ 13{,}4\ \%$ zu viel.

Theoretisch ist der Fehler in § 3 nachgewiesen durch $\frac{1}{3} k \cdot e$; k ist $= \frac{6{,}0 \cdot 9{,}0}{2} = 27{,}0$ □M., $e = 100{,}0$ M., daher $\frac{1}{3} \cdot 27{,}0 \cdot 100{,}0 = 900{,}0$ Cubkm. wie vor.

Nach der Methode *sub b* ist, wenn F_1 das mittlere Durchschnittsprofil ist, $\frac{h+h_1}{2} = \frac{8{,}0 + 2{,}0}{2} = 5{,}0$ M.

$$F_1 = \frac{5{,}0 + 5{,}0 + 3 \cdot 5{,}0}{2} \cdot 5{,}0 = 62{,}5 \text{ □M.}$$

und der körperliche Inhalt $I = 62{,}5 \cdot 100{,}0 = 6250{,}0$ Cubikmeter; daher

6700,0 — 6250,0 = 450,0 Cubikmeter zu wenig, oder $\frac{100,0 \cdot 450,0}{6700,0}$ = *pptr.* 6,7 % zu wenig.

Theoretisch ist § 4 nachgewiesen, dass der Fehler $\frac{1}{2}$ von dem Fehler bei Methode *a* ist, 450,0 ist aber = $\frac{900,0}{2}$.

Ist $h_1 = 0$, und die übrigen Werthe dieselben, so ist $\frac{F}{2}$ wieder = 68,0 □M.; $h - h_1 = 8,0 - 0,0 = 8,0 = d$, $\frac{d^2}{4} = \frac{64,0}{4} = 16,0$ □M., und nach Formel 3. $I = (68,0 - 16,0)\ 100,0 = 52,0 \cdot 100,0 = 5200,0$ Cubkm.

Nach der Methode *sub a* ist $F = 136,0$ □M., $\frac{F+f}{2} = \frac{F+0}{2} = \frac{136,0}{2} = 68,0$ □M.; $I = 68,0 \cdot 100,0 = 6800,0$ Cubkm., daher 6800,0 — 5200,0 = 1600,0 Cubkm. zu viel, oder $\frac{100 \cdot 1600,0}{5200,0}$ = *pptr.* 30,8% zu viel.

Nach der Methode *sub b* ist bei diesem Beispiel $\frac{h+h_1}{2} = \frac{8,0 + 0,0}{2}$ = 4,0 M., $F_1 = \frac{5,0 + 5,0 + 3 \cdot 4,0}{2} \cdot 4,0 = 44,0$ □M.; $I = 44,0 \cdot 100,0$ = 4400,0 Cubkm., daher 5200,0 — 4400,0 = 800,0 Cubkm. zu wenig, oder $\frac{100 \cdot 800,0}{5200,0}$ = *pptr.* 15,4% zu wenig.

Aus den vorstehenden Beispielen geht hervor, dass bei hügeligem Terrain durch Anwendung der Annäherungs-Methoden für die Berechnung der Erdmassen, sehr unrichtige Resultate entstehen. Es muss diese Art der Behandlung des Gegenstandes umsomehr ungerechtfertigt erscheinen, als einerseits bei Anwendung der Annäherungs-Methoden ein Compensiren der Fehler während der Berechnung nicht stattfinden kann, da bei Anwendung der Methode *sub a* der Fehlerwerth bei den einzelnen Abschnitten immer positiv, bei Anwendung der Methode *sub b* immer negativ ist, andererseits die Berechnung auf Grund einer der beiden entwickelten mathematisch richtigen Formeln, oder vielmehr nach einer Hilfstabelle, welche der resp. Formel entspricht, den Zeitaufwand für die Berechnung der Erdmassen durchaus nicht erheblich vergrössert. Die Hilfstabelle ist so einzurichten, dass man darin für die Auftragshöhen und Abtragstiefen von 0,00 Meter bis etwa 25,00 Meter und für ein bestimmtes Normal Querprofil des Auftrages und des Abtrages die Werthe für $\frac{f}{2}$, $\frac{F}{2}$ und $\frac{d^2}{4}$ (d liegt ebenfalls innerhalb der Werthe von 0,00 bis 25,00 M.), resp. bei Anwendung von Formel 4. die Werthe für F_1 und $\frac{d^2}{8}$, findet.

§ 7.

Inhalts-Berechnung des Bahnkörpers in Curven; dazu Fig. 2*a*, *b*, *c*.

Bezeichnen wir wie in Fig. 1 die Planumsbreite mit b, die Höhe des grösseren Profils mit h, die Höhe des kleineren Profils mit h_1, $h - h_1$ mit d, die Entfernung in der Mittellinie DL, im Bogen gemessen, mit e, die kleine Profilfläche mit f, die grosse mit F, so ist:

1) der Inhalt des Rotationskörpers $ABERNMIH$ = der erzeugenden Fläche $\times$ dem Weg des Schwerpunktes, also $= f \cdot e$.
2) Der Inhalt des keilförmigen Körpers ARN_1NHH_1, welcher als die Hälfte eines Rotationskörpers anzusehen ist, dessen erzeugende Fläche $(b + 3h_1)\ d$, und bei dem der Weg des Schwerpunktes wieder e ist; jener Inhalt ist daher $= (b + 3h_1)\ \frac{d}{2} \cdot e$.
3) Nennen wir die im Bogen gemessene Höhe AH der linksseitigen Pyramide l, die im Bogen gemessene Höhe RN der rechtsseitigen Pyramide l_1 so ist der Inhalt der ersteren $= \frac{3}{2} d \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{l}{3}$, der Inhalt der zweiten $= \frac{3}{2} d \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{l_1}{3}$, die Summe dieser beiden Inhalte ist $= \frac{3}{2} d \cdot \frac{d}{2 \cdot 3} (l + l_1)$.

Nun ist aber $\frac{l + l_1}{2} = e$, also $l + l_1 = 2e$, diesen Werth für $l + l_1$ in obige Gleichung gesetzt, giebt für den Inhalt der beiden seitlichen Pyramiden $\frac{3}{2} d \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot e$.

Der aus dem Inhalte der einzelnen Körper sich zusammensetzende Inhalt des Bahnkörper-Abschnittes ist daher

$$I = \left[f + (b + 3h_1) \frac{d}{2} + \frac{3}{2} d \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{2}{3} \right] e.$$

Dies ist aber der erste Werth für I in § 1, aus welchem durch Umformungen die Formel 1. entstand, und ist damit nachgewiesen, dass diese Formel auch für die durch normale Querprofile bestimmten Abschnitte des Bahnkörpers in der Curve gilt.

Da als Trace die Mittellinie nicht des eingeleisigen, sondern des zweigeleisigen Planums, in dem Falle abgesteckt, stationirt und nivellirt wird, wo der Erdbau mit wenigen Ausnahmetrecken, zuerst eingeleisig ausgeführt wird, so ist eigentlich die Länge der Bogenlinie CK gemessen, und nicht die Länge der Bogenlinie $DL = e$. Ist, wie in Fig. 2*c* die convexe Seite der Curve linksseitig, so ist die Mittellinie des zweigeleisigen Planums länger wie die Mittellinie des eingeleisigen, liegt die convexe Seite der Curve nach rechts, so ist die erstere Mittellinie kürzer wie die letztere. Bei kleinen Radien ist

dieser Umstand von einiger Bedeutung. Der Abstand der Mittellinie des zweigeleisigen Planums von der Mittellinie des eingeleisigen Planums sei = 1,8 M. = LK.

Ist nun CK = 20,0 M. und der rad. PK = 1000 M., so ist, wenn $DL = x$, $1000 : 998{,}2 = 20{,}0 : x$

x = 19,964 M.

für den rad. 800 M. ist x = 19,955 „

„ „ „ 600 „ „ „ = 19,940 „

„ „ „ 400 „ „ „ = 19,910 „

„ „ „ 200 „ „ „ = 19,820 „

§ 8.

Erweiterung des Abtragsprofils wegen variabeler Grabentiefe.

Bei Eisenbahn- und Wege-Abträgen in horizontalen Strecken, bekommen die Parallelgräben wegen des ihnen zur Abwässerung zu gebenden Gefälles eine variabele Tiefe, wodurch eine Profil-Erweiterung des Abtrages bedingt ist. Sind bei dem Profil B Eig. 3*b*, die Parallelgräben um t Meter tiefer wie bei Profil A Fig. 3*a*, so beträgt die Breite der Profil-Erweiterung an jeder Seite der Mittellinie so viel, wie die Oberkante des Grabenprofils grösser geworden ist, d. h. $2 \cdot \frac{3}{2} t = 3t$, auf beiden Seiten zusammen $= 2 \cdot 3t = 6t$; ist h_1 die Abtragstiefe dieses Profils, so beträgt der Flächen-Inhalt der Erweiterung des Profils B, abgesehen von dem Profil-Inhalt der Gräben $= 6t \cdot h_1$.

Für ein drittes Profil C Fig. 3*c*, bei welchem die Parallelgräben um t_1 Meter tiefer sind wie bei Profil A, ist die Profil-Erweiterung $= 6t_1 h_{11}$.

Denkt man sich den Körper *efrgnoml* in sehr viele Schnitte parallel zu den Flächen *efrg* und *lmon* zerlegt, den Körper *ikrgnoqp* in ebenso viele Schnitte parallel zu den Flächen *ikrg* und *noqp* getheilt, so sind die analogen Theile der beiden Körper, welche dieselbe Länge haben, einander gleich, und es sind deshalb auch die ganzen Inhalte der beiden Körper einander gleich, so dass man *ikrgnoqp* für *efrgnoml* substituiren kann. Der Körper *ikrgnoqp* kann nun zerlegt gedacht werden in die beiden schiefabgeschnittenen Prismen *ikrgpn* mit den parallelen Seitenkanten *ig*, *kr*, *pn* und *pqonkr* mit den parallelen Seitenkanten *pn*, *qo* und *kr*.

Die normale Durchschnittsfläche ist, wenn die Entfernung der Profile von einander = e, für das erste dreiseitige schiefabgeschnittene Prisma $= \frac{3t \cdot e}{2}$, für das zweite $= \frac{3t_1 \cdot e}{2}$, der körperliche Inhalt der Verbreiterung auf jeder Seite der Mittellinie,

$$\frac{I}{2} = \frac{3t \cdot e}{2}\left(\frac{2h_1 + h_{11}}{3}\right) + \frac{3t_1 \cdot e}{2}\left(\frac{2h_{11} + h_1}{3}\right)$$

$$\frac{I}{2} = \frac{e}{2}\left[t(2h_1 + h_{11}) + t_1(2h_{11} + h_1)\right]$$

der körperliche Inhalt der ganzen Verbreiterung ist daher

Formel 5. $I = e\left[t(2h_1 + h_{11}) + t_1(2h_{11} + h_1)\right]$.

Zwischen den Profilen A und B beträgt die Verbreiterung

$$I = e\left[0(2h + h_1) + t(2h_1 + h)\right]$$

Formel 6. $$I = e \cdot t(2h_1 + h)$$

§ 9.

Vernachlässigung, event. Berücksichtigung der Werthe $\frac{d^2}{4}$ in Formel 1. und $\frac{d^2}{8}$ in Formel 4., bei Gräben.

Bei Berechnung des körperlichen Inhaltes der Abtrags-Parallelgräben bei variabeler Tiefe derselben, kann insofern, als das Gefälle sehr gering angenommen wird, etwa 0,1M. auf 100 lfd.-Meter, das $\frac{d^2}{4}$ in der Formel 1. $I = \left(\frac{f}{2} + \frac{F}{2} - \frac{d^2}{4}\right) e$ vernachlässigt werden, da, wenn $d = 0{,}1$M. und $e = 100$M. ist, $\frac{d^2}{4} \cdot e$ nur $= 0{,}25$ Cubikmeter, bei den beiderseitigen Gräben zusammen $= 2 \cdot 0{,}25 = 0{,}50$ Cubikmeter ist. Umsomehr ist $\frac{d^2}{8}$ in Formel 4. bei der Inhalts-Berechnung des Abtragsgrabens mit variabeler Tiefe, zu vernachlässigen.

Da der Werth für $\frac{d^2}{8}$ nicht von der Kronen — resp. Sohlen-Breite des Querschnittes, sondern lediglich von der Verschiedenheit der Werthe für h und h_1 (das Neigungs-Verhältniss der Böschungen immer constant zu 1 : 1,5, vorausgesetzt) abhängig ist, so wird bei einem Bahngraben, dessen Sohle viel kleiner ist wie die Krone des Bahnkörpers, sobald, wie es bei den Gräben des Auftrages häufig der Fall ist, $h - h_1$ ein nicht unbedeutender Werth ist, durch Vernachlässigung von $\frac{d^2}{8}$, bei dem Graben, der relative Fehler ein viel grösserer sein, wie bei dem Bahnkörper. Bei den Gräben des Auftrages wird man daher noch weniger wie bei dem Bahnkörper, $\frac{d^2}{8}$ bei Anwendung der Formel 4. vernachlässigen dürfen.

Die Hilfstabelle für den Inhalt der Querschnitte der Gräben bei einer constanten Sohlenbreite genügt schon, wenn sie für die Tiefen von 0,00 bis 5,00 M. bearbeitet ist.

§ 10. Schema für die Erdmassen-Berechnung des Bahn-

1.	Nach dem Längenprofil				Gemittelte Höhen resp. Tiefen				10.	11.
Stationspunkt.	2.	3.	Grabentiefe		6.	7.	der Gräben		Länge.	$h - h_1$ für Auftrag resp. Abtrag.
	Auftragshöhe.	Abtragstiefe.	4. links.	5. rechts.	des Auftrages.	des Abtrages.	8. links.	9. rechts.		
	M.	M.	M.	M.	M.	M.	M.	M.	M.	M.

Vorstehendes Schema für die Erdmassen-Berechnung des Eisenbahnkörpers haben wir unter Zugrundelegung der Formel 4. aufgestellt. Die Colonnen für die Gräben sind nur wegen der Gräben des Auftrages nothwendig, und fallen bei generellen Veranschlagungen fort. Die Inhalte der Abtragsgräben können dann in die Colonne für den Cubik-Inhalt des Abtrages mit eingetragen werden.

Zum Unterschiede ist bei dem linksseitigen Graben der Werth $h - h_1 = d$ in der Formel 4., mit $t - t_1$, bei dem rechtsseitigen Graben mit $t_2 - t_3$ bezeichnet.

körpers und auf jenes sich beziehende Bemerkungen.

Querschnittsfläche in der Mitte und darunter $\frac{(h-h_1)^2}{8}$.		14. $t-t_1$ für den linksseitigen Graben.	15. Die Querschnittsfläche in der Mitte u. darunter $\frac{(t-t_1)^2}{8}$	16. t_2-t_3 für den rechtsseitigen Graben.	17. Die Querschnittsfläche in der Mitte u. darunter $\frac{(t_2-t_3)^2}{8}$	Cubik-Inhalt.				
12. im Auftrag.	13. im Abtrag.					18. im Auftrag.	19. im Abtrag.	in den Gräben 20. links.	in den Gräben 21. rechts.	22. im Abtrag und in den Gräben zusammen.
□M.	□M.	M.	□M.	M.	□M.	Cbkm.	Cbkm.	Cbkm.	Cbkm.	Cbkm.

In Bezug auf die Gräben des Auftrages wird vorausgesetzt, dass die Tiefen der Sohle unter dem Terrain ermittelt sind, um sie in die Colonnen für die Grabentiefen eintragen zu können, so dass die beiden Colonnen für die Tiefen des linksseitigen und des rechtsseitigen Grabens unter dem Planum, der Raumersparniss wegen, wegfallen.

Bei variabeler Tiefe der Abtragsgräben und damit verbundener Erweiterung des Abtragsprofils (siehe § 8.), sind die nach den Formeln 5. und 6. berechneten Cubik-Inhalts-Werthe in die Colonne für den Cubik-Inhalt des Abtrages mit einzutragen; es ist bei jedem durch die

aufeinanderfolgenden Stationspunkte abgegrenzten Bahnkörper-Abschnitt in der qu. Colonne hierzu eine Zeile verfügbar. Aus den Colonnen für den Cubik-Inhalt, werden die Werthe soweit zusammengezogen wie die Massen-Disposition es erfordert, in die Dispositions-Tabelle mit den Werthen, welche die Inhalts-Berechnungs-Tabelle für Bahnkörper-Abschnitte, bei denen das Quergefälle berücksichtigt werden muss (Haupt-Abschnitt *B*), zusammen übertragen.

§ 11.

Wie gestalten sich die Formeln für die Inhalts-Berechnung, wenn die Böschungen des Normalprofils nicht das Neigungsverhältniss 1 : 1,5, sondern allgemein das Neigungsverhältniss 1 : n haben?

Wir haben bisher bei unsern Formeln für die Inhalts-Berechnung vorausgesetzt, dass die Böschungen des Normalprofils das Neigungsverhältniss 1 : 1,5, haben ($1^1/_2$ füssig sind); nun wollen wir sehen wie sich Formel 1. und Formel 4. ändern, wenn das Neigungsverhältniss allgemein $1 : n$ ist. Indem wir die Grundfläche der Pyramiden Fig. 1. k nannten, erhielten wir in § 3. und 4. für die Formel 1. die Gleichung

$$I = \left(\frac{f}{2} + \frac{F}{2} - \frac{1}{3}\,k\right) e,$$

für die Formel 4. die Gleichung

$$I = \left(F_1 + \frac{1}{6}\,k\right) e.$$

Nun ist aber $k = \frac{n \cdot d \cdot d}{2} = \frac{n \cdot d^2}{2} \cdot$ (d ist nach § 1. = der Differenz der Höhen, $= h - h_1$).

Den Werth für k in die beiden Gleichungen für I substituirt, giebt

$$I = \left(\frac{f}{2} + \frac{F}{2} - \frac{n \cdot d^2}{3 \cdot 2}\right) e,$$ dafür

Formel 7. $$I = \left(\frac{f}{2} + \frac{F}{2} - \frac{n \cdot d^2}{6}\right) e,$$

und für die zweite Gleichung

$$I = \left(F_1 + \frac{n \cdot d^2}{6 \cdot 2}\right) e,$$ dafür

Formel 8. $$I = \left(F_1 + \frac{n \cdot d^2}{12}\right) e.$$

§ 12.

Folgerungen aus dem vorhergehenden Paragraphen.

Aus den Formeln 7. und 8. folgt, dass der Fehlerwerth bei Anwendung der empirischen Berechnungs-Methoden in demselben Verhältnisse mit n und im quadratischen Verhältnisse mit d abnimmt resp. zunimmt.

§ 13.

Bemerkung in Bezug auf die supergenerelle Inhalts-Berechnung.

Der im § 3. erwiesene Grundsatz, dass der Fehlerwerth, den die Anwendung der empirischen Berechnungs-Methode bedingt, im quadratischen Verhältnisse mit der Anzahl der gleichen Theile, in welche der Bahnkörper-Abschnitt zerlegt wird, abnimmt, ist bei supergenerellen Erdmassen-Berechnungen ganz besonders zu berücksichtigen. Hier hat man für die Länge eines Bahnkörper-Abschnittes oft mehrere hundert Meter; ist dabei $h - h_1 = d$ auch nur von einiger Bedeutung, so wird bei Vernachlässigung des $\frac{d^2}{8}$ in Formel 4. ein sehr beträchtlicher Fehler gemacht. Kommen bei specieller Bearbeitung an Stelle des einen Bahnkörper-Abschnittes 10 gleich lange kleine Bahnkörper-Abschnitte zur Berechnung, so wird der Fehler, welcher an der Summe der Inhalte dieser 10 Körper bei Vernachlässigung des $\frac{d^2}{8}$ noch haftet, nur $\frac{1}{100}$ von dem Fehler betragen, der bei der supergenerellen Berechnung gemacht worden ist. In dem angenommenen Falle würde bei der supergenerellen Berechnung eine bedeutend kleinere Masse ermittelt worden sein.

Ist $h - h_1$ von Bedeutung, so ist der Unterschied der Resultate der beiden Berechnungsweisen ein sehr erheblicher. Die Arbeitsvermehrung, welche das Berücksichtigen von $\frac{d^2}{8}$ bei supergenerellen Inhalts-Berechnungen bedingt, ist aber keineswegs beträchtlich, denn $h - h_1 = d$ ist sehr leicht gebildet, $\frac{d^2}{8}$ entnimmt man aus der Tabelle, und hat diesen Werth noch zu F_1 hinzuzuaddiren.

B.

Inhalts-Berechnung des Eisenbahnkörpers bei Terrain-Verhältnissen, die das Berücksichtigen des Quergefälles erforderlich machen.

§ 14.

Wie zeigt sich der Einfluss des Quergefälles des Terrains auf die Inhalts-Berechnung?

Nehmen wir zunächst an, dass das Quergefälle wie in der Fig. 4 ein stetiges ist, so ist das Grössenverhältniss der Dreiecke AEP und EGB entscheidend für den Einfluss, den das Quergefälle $1 : n$ auf den kubischen Inhalt des Erdkörpers hat; weil der Inhalt des Dreiecks AEP hierbei positiv, der Inhalt des Dreiecks EGB negativ ist. $1\frac{1}{2}$ füssige Böschung bei dem Erdkörper vorausgesetzt, ist:

$$\frac{3}{2}x + a = x \cdot n$$

$$n \cdot x - \frac{3}{2}x = a$$

$$\frac{2n-3}{2} \cdot x = a$$

Formel 9. $$x = \frac{2a}{2n-3}$$

$$y \cdot n + \frac{3}{2}y = a$$

$$\frac{2n+3}{2} \cdot y = a$$

Formel 10. $$y = \frac{2a}{2n+3}$$

daher $x : y = \frac{2a}{2n-3} : \frac{2a}{2n+3}$, dafür

$$x : y = 2n + 3 : 2n - 3.$$

Nun ist $\triangle AEP = \frac{a \cdot x}{2}$

$$\triangle EGB = \frac{a \cdot y}{2}$$

daher $\triangle AEP : \triangle EGB = x : y = 2n + 3 : 2n - 3.$

Ist $n = 20$, so verhält sich

$$\triangle AEP : \triangle EGB = 43 : 37.$$

§ 15.

In welcher Weise ändert sich der Einfluss des Quergefälles des Terrains auf die Inhalts-Berechnung bei der Aenderung des Neigungsverhältnisses des Terrain-Gefälles in der Quere?

Nennen wir die Querschnittsfläche ohne Berücksichtigung des Quergefälles F_1, die wirkliche Querschnittsfläche (Fig. 4), also mit Berücksichtigung des Quergefälles F, so ist

$$F_1 = \frac{2b + 3h}{2} \cdot h = (b + 1{,}5h)\, h,$$

$$F = F_1 + (\triangle\, AEP - \triangle\, EGB)$$

$$\triangle\, AEP - \triangle\, EGB = (x - y)\frac{a}{2}$$

$$= \left(\frac{2a}{2n-3} - \frac{2a}{2n+3}\right)\frac{a}{2}$$

$$= \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n+3}\right) 2a \cdot \frac{a}{2}$$

$$= \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n+3}\right) a^2.$$

Setzen wir nun $\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n+3} = k$, so ist $\triangle\, AEP - \triangle\, EGB = a^2 \cdot k$, daher $F = F_1 + a^2 \cdot k$.

Ist $n = 1{,}5$, so sind die Terrainfläche und die eine Böschungsfläche zu einander parallel, und die Querschnittsfläche wird dann unendlich gross;

ist $n < 1{,}5$, so divergiren die Querschnittslinie des Terrains mit der Querschnittlinie der einen Böschungsfläche, und die Querschnittsfläche des Erdkörpers wird wieder unendlich gross. Daraus folgt, dass, wenn beide Böschungen des Erdkörpers das Neigungsverhältniss 1 : 1,5 haben sollen, n stets grösser wie 1,5, und daher auch stets positiv sein muss.

Dann ist aber $\frac{1}{2n-3}$ stets kleiner wie $\frac{1}{2 \cdot 1{,}5 - 3} = \frac{1}{0} = \infty$, und stets grösser wie $\frac{1}{2 \cdot 1{,}5 + 3} = \frac{1}{6}$.

$\frac{1}{2n+3}$ stets kleiner wie $\frac{1}{2 \cdot 1{,}5 + 3}$, also wie $\frac{1}{6}$. k wird daher stets positiv sein, und kann hiernach alle Werthe von nahezu unendlich bis zu einem sehr kleinen Bruch durchlaufen.

Je grösser n ist, desto kleiner wird k werden, und desto geringern Einfluss wird daher das Quergefälle auf den Inhalt des Erdkörpers haben.

Wenn $n = 2$ ist, so ist $\frac{1}{2n-3} = \frac{1}{2 \cdot 2 - 3} = \frac{1}{1} = 1$, und $\frac{1}{2n+3} = \frac{1}{2 \cdot 2 + 3} = \frac{1}{7}$, daher $\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n+3} = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7} = k$.

Der Werth 2 für n wird als kleinster Werth in der Praxis in Betracht kommen, und dann auch nur bei kleinen Aufträgen resp. Abträgen, während bei einem steileren Quergefälle, oder bei demselben aber grösseren Auftragshöhen resp. Abtragstiefen, Futtermauern, anstatt der Böschungs-Erdkörper angewandt werden; dem entsprechend wird $\frac{6}{7}$ als grösster in der Praxis vorkommender Werth für k, angesehen werden können.

Es war $\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n+3} = k$, dafür $\frac{(2n+3)-(2n-3)}{(2n-3)(2n+3)} = k$, dafür $\frac{6}{4n^2-9} = k$.

Für ein anderes Quergefälle n_1 ist $\frac{6}{4n_1{}^2-9} = k_1$.

Es verhält sich daher $k_1 : k = \frac{6}{4n_1{}^2-9} : \frac{6}{4n^2-9}$, oder $k_1 : k = 4n^2 - 9 : 4n_1{}^2 - 9$, oder $k_1 : k = n^2 - 2{,}25 : n_1{}^2 - 2{,}25$.

In dieser Proportion ist ausgedrückt, dass der Coefficient k (in der obigen Formel für *F)*, und damit auch der Querschnitt wächst, wenn der Werth für n abnimmt, also das Quergefälle steiler wird, abnimmt, wenn der Werth für n zunimmt, also das Quergefälle flacher wird, und zwar findet dieses Wachsen oder Abnehmen in dem bestimmten Maasse statt.

Beispiele. Ist Fig. 4. $b = 5{,}0\ m$, $h = 1{,}0\ m$ und $n = 2$, so ist die Querschnittsfläche ohne Berücksichtigung des Quergefälles, welche wir oben F_1 nannten, $= (5{,}0 + 1{,}5 \cdot 1{,}0)\ 1{,}0 = 6{,}5$ □ M., die eigentliche Querschnittsfläche $F = F_1 + a^2 \cdot k = 6{,}5 + a^2 \cdot k$.

a ist $= \frac{b}{2} + 1{,}5\ h = 2{,}5 + 1{,}5 = 4{,}0$ M. k ist für $n = 2$, wie wir oben ausgeführt haben, $= \frac{6}{7}$; es ist daher $F = 6{,}5 + 4^2 \cdot \frac{6}{7} = 6{,}5 + 16 \cdot \frac{6}{7} = 20{,}214285$ □ M.

Entwickeln wir nun unter Zugrundelegung der Werthe 2,0 für n und dem entsprechend $\frac{6}{7}$ für k aus obiger Proportion für den variabeln Werth für n_1, den Werth für k_1.

Darnach ist für $n_1 = 10$, $k_1 = \frac{\frac{6}{7}(2^2 - 2{,}25)}{10^2 - 2{,}25}$, $k_1 = \frac{6 \cdot 1{,}75}{7 \cdot 97{,}75} = \frac{10{,}50}{684{,}25} = 0{,}015345$.

Für $n_1 = 20$, $k_1 = \frac{10{,}50}{7 \,.\, 397{,}75} = \frac{10{,}50}{2784{,}25} = 0{,}003771$.

Für $n_1 = 25$, $k_1 = \frac{10{,}50}{7 \cdot 622{,}75} = \frac{10{,}50}{4359{,}25} = 0{,}002409$.

Für $n_1 = 30$, $k_1 = \frac{10{,}50}{7 \cdot 897{,}75} = \frac{10{,}50}{6284{,}25} = 0{,}001671$.

Für $n_1 = \infty$ ist $k_1 = \frac{10{,}50}{7(\infty^2 - 2{,}25)} = \frac{10{,}50}{\infty} = 0{,}000000$.

Der Querschnitts-Inhalt ist, wenn

$n = 2$ und $k = \frac{6}{7}$, F wie oben $= 20{,}214285$ □ M.

$n_1 = 10$ und $k = 0{,}015345$, $F = 6{,}5 + 16{,}0 \cdot 0{,}015345 = 6{,}745520$ □ M.
$n_1 = 20$ und $k = 0{,}003771$, $F = 6{,}5 + 16{,}0 \cdot 0{,}003771 = 6{,}560336$ □ M.
$n_1 = 25$ und $k = 0{,}002409$, $F = 6{,}5 + 16{,}0 \cdot 0{,}002409 = 6{,}538544$ □ M.
$n_1 = 30$ und $k = 0{,}001671$, $F = 6{,}5 + 16{,}0 \cdot 0{,}001671 = 6{,}526736$ □ M.
$n_1 = \infty$ und $k = 0{,}000000$, $F = 6{,}5 + 16{,}0 \cdot 0{,}000000 = 6{,}500000$ □ M.

Nach $\frac{0}{0}$ berechnet; beträgt für das gegebene Beispiel bei dem Quergefälle von 1 : 25 der Fehler, welcher bei Vernachlässigung dieses Quergefälles entsteht,

$$\frac{100 \cdot 0{,}038544}{6{,}538544} = 0{,}59\ \frac{0}{0}.$$

Dieser Fehler für das Quergefälle 1 : 25 ist aber nicht constant, wir werden in dem Folgenden sehen, dass derselbe durch eine andere Kronenbreite und durch eine andere Höhe modificirt wird.

§ 16.

Die Kronenbreite des Bahnkörpers sei variabel und die Werthe für die Höhen und für das Quergefälle seien constant.

Sehen wir den Werth für die Kronenbreite, b als variabel und die Werthe für h und für n als constant an, so ist a auch variabel, weil $a = \frac{b}{2} + 1{,}5\,h = \frac{b + 3h}{2}$.

Es war die Formel für F in § 15.

$$F = F_1 + a^2 \cdot k = (b + 1{,}5\,h)\,h + a^2 \cdot k.$$

Nehmen wir wie in dem vorigen Beispiel $h = 1{,}0$ M. an, und wird $n = 25$ angenommen, so ist nach der vorhergehenden Zusammenstellung $k = 0{,}002409$; für b nehmen wir anstatt 5,0 M. den der Breite einer Grabensohle entsprechenden Werth 0,8 M. an, und setzen diese Werthe in die Gleichung für F, so ist

$$F = (0{,}8 + 1{,}5 \cdot 1{,}0)\,1{,}0 + \left(\frac{0{,}8 + 3 \cdot 1{,}0}{2}\right)^2 0{,}002409$$

$$F = 2{,}3 + \frac{3{,}8^2}{4} \cdot 0{,}002409$$

$$F = 2{,}3 + \frac{14{,}44}{4} \cdot 0{,}002409$$

$$F = 2{,}3 + 0{,}00869649 = 2{,}30869649 \text{ □ M.}$$

Der Querschnitt ohne Berücksichtigung des Quergefälles ist $F_1 = (0{,}8 + 1{,}5 \cdot 1{,}0)\ 1{,}0 = 2{,}3$ □M.

Die Differenz zwischen F und F_1 ist $= 0{,}00869649$.

Der Fehler bei Vernachlässigung des Quergefälles beträgt daher in $\% \frac{100 \cdot 0{,}00869649}{2{,}30869649} = 0{,}38\%$.

Wird b für die Breite des zweigeleisigen Abtrags-Planums (incls. Gräben und Bankette) Fig. 5 zu 10,4 M., und werden im Uebrigen dieselben Werthe wie zuvor angenommen, so ist (die Querschnittsfläche der beiden Abtragsgräben beträgt $2 \cdot \frac{2{,}32 + 0{,}94}{2} \cdot 0{,}46 = 1{,}4996$ □M.)

$$F = (10{,}4 + 1{,}5 \cdot 1{,}0)\ 1{,}0 + 1{,}4996 + \left(\frac{10{,}4 + 3 \cdot 1{,}0}{2}\right)^2 0{,}002409$$

$$F = 11{,}9 + 1{,}4996 + \frac{13{,}4^2}{4} \cdot 0{,}002409$$

$$F = 11{,}9 + 1{,}4996 + \frac{179{,}56}{4} \cdot 0{,}002409$$

$$F = 13{,}3996 + 0{,}10814001 = 13{,}50774001 \text{ □M.}$$

Ohne Berücksichtigung des Quergefälles ist der Querschnitt $F_1 = 13{,}3996$ □M.

Der Fehler bei Vernachlässigung des Quergefälles würde sein

$$\frac{100 \cdot 0{,}10814001}{13{,}50774001} = 0{,}80\%.$$

Bei	0,8 M.	Sohlenbreite ist der Fehler	0,38%
„	5,0 M.	Planumsbreite „ „	0,59%
„	10,4 M.	Planums-Breite + Gräben und Bankette	0,80%.

Hiernach wächst mit dem Zunehmen der Breite des Erdkörpers der Fehler bei Vernachlässigung des Quergefälles.

§ 17.

Die Höhe des Querprofils sei variabel, die übrigen Factoren seien constant.

Sehen wir bei demselben Quergefälle 1:25 und der Abtragsbreite 10,4 M., die Tiefe h als variabel an, und setzen zunächst $h = 0{,}208$ M., bei welcher Tiefe der Eckpunkt A Fig. 5 gerade erreicht wird, so ist

$$F = (10{,}4 + 1{,}5 \cdot 0{,}208)\ 0{,}208 + 1{,}4996 + \left(\frac{10{,}4 + 3 \cdot 0{,}208}{2}\right)^2 0{,}002409$$

$$F = 2{,}228096 + 1{,}4996 + \frac{11{,}024^2}{4} \cdot 0{,}002409 = 3{,}800887 \text{ □M.}$$

Ohne Berücksichtigung des Quergefälles ist der Querschnitt

$$F_1 = (10{,}4 + 1{,}5 \cdot 0{,}208)\ 0{,}208 + 1{,}4996 = 3{,}727696 \text{ □M.}$$

Fehler $= 3{,}800887 - 3{,}727696 = 0{,}073191$ □M. oder $\frac{100 \cdot 0{,}073191}{3{,}800887} = 1{,}93\%$.

Ist bei denselben übrigen Werthen $h = 0{,}5$ M., so ist

$$F = (10{,}4 + 1{,}5 \,.\, 0{,}5)\ 0{,}5 + 1{,}4996 + \left(\frac{10{,}4 + 3 \,.\, 0{,}5}{2}\right)^2\ 0{,}002409$$

$$F = 7{,}0746 + \frac{11{,}9^2}{4} \,.\, 0{,}002409 = 7{,}0746 + 0{,}085285 = 7{,}159885 \square\text{M.}$$

$F_1 = 7{,}0746 \square$M.

Fehler $= 0{,}085285 \square$M., oder

$$\frac{100 \,.\, 0{,}085285}{7{,}159885} = 1{,}19\,\%.$$

Ist bei denselben übrigen Werthen $h = 30{,}0$ M., so ist

$$F = (10{,}4 + 1{,}5 \,.\, 30{,}0)\ 30{,}0 + 1{,}4996 + \left(\frac{10{,}4 + 3 \,.\, 30{,}0}{2}\right)^2\ 0{,}002409$$

$$F = 1663{,}4996 + \frac{100{,}4^2}{4} \cdot 0{,}002409$$

$$F = 1663{,}4996 + 6{,}070776 = 1669{,}570376 \square\text{M.}$$

$F_1 = 1663{,}4996 \square$M.

Fehler $= 6{,}070776 \square$M., oder

$$\frac{100 \,.\, 6{,}070776}{1669{,}570376} = 0{,}36\,\%.$$

Stellen wir nun den Procentsatz der Fehler für dasselbe Quergefälle 1 : 25 und dieselbe Abtragsbreite 10,4 M. zusammen, so ist

bei	0,208	M.	Abtragstiefe	der	Fehler	$= 1{,}93\,\%$
„	0,5	M.	„	„	„	$= 1{,}19\,\%$
„	1,0	M.	„	„	„	$= 0{,}80\,\%$
„	30,0	M.	„	„	„	$= 0{,}36\,\%$.

Aus dieser Zusammenstellung geht hervor, dass bei geringen Höhen des Erdkörpers die Vernachlässigung des Quergefälles von 1 : 25 einen nicht unbeträchtlichen relativen Fehler herbeiführt; der absolute Werth dieses Fehlers ist jedoch unbedeutend, weil es sich bei den geringen Höhen doch auch nur um kleine Erdmassen handelt. Man wird daher, wenn das Quergefälle ein stetiges ist, und das Längenprofil in die Mitte des Erdkörpers gelegt ist, jenes Quergefälle nur bis zu dem Neigungsverhältniss 1 : 25 in der Praxis bei der Erdmassen-Berechnung berücksichtigen müssen.

§ 18.

Welchen Einfluss auf die Inhalts-Berechnung hat das Quergefälle des Terrains, wenn das Längenprofil nicht in der Mitte des Bahnkörpers liegt?

Es wurde bei unserer bisherigen Abhandlung, betreffend das stetige Quergefälle, vorausgesetzt, dass die Tiefe des Grabens resp. Höhe des Bahnkörpers, in der Mitte des Querschnittes bestimmt ist.

Nun haben wir noch den Fall in Betracht zu ziehen, den wir schon in dem Hauptabschnitt *A* bei der Inhalts-Berechnung des Bahnkörpers in Curven berührten, dass der Bahnkörper zu Anfang grösstentheils eingeleisig im Erdbau ausgeführt wird, die Mittellinie des zweigeleisigen Planums aber durchgehend die Trace für die resp. Eisenbahn ist.

a) Fig 6 stellt bei dem Auftrag den Fall dar, dass das Steigen nach der Mittellinie hin, auf der schmalen Profilseite stattfindet.

$$\frac{3}{2}\,x + 2{,}2 = 25\,x$$

$$23{,}5\,x = 2{,}2$$

$$x = \frac{2{,}2}{23{,}5} = 0{,}0936 \text{ M.}$$

$$\triangle\, ABE = \frac{x \,.\, 2{,}2}{2} = 0{,}0936 \cdot \frac{2{,}2}{2} = 0{,}10296 \text{ □M.}$$

$$25\,y + \frac{3}{2}\,y = 5{,}8$$

$$26{,}5\,y = 5{,}8$$

$$y = \frac{5{,}8}{26{,}5} = 0{,}2189 \text{ M.}$$

$$\triangle\, BCD = \frac{y \,.\, 5{,}8}{2} = \frac{0{,}2189 \,.\, 5{,}8}{2} = 0{,}63481 \text{ □M.}$$

$$\triangle\, ABE - \triangle\, BCD = 0{,}10296 - 0{,}63481 = -\,0{,}53185 \text{ □M.}$$

Ohne Berücksichtigung des Quergefälles ist der Querschnitt (siehe § 15.) = 6,5 □M. Bei Berücksichtigung des Quergefälles = 6,5 — 0,53185 = 5,96815 □M.

In diesem Falle wird bei Vernachlässigung des Quergefälles der Inhalt des Querschnittes zu gross angenommen, während wir oben gesehen haben, dass wenn die Bahnachse wirklich in der Mitte liegt, stets das Gegentheilige sich herausstellt.

Nach % berechnet, beträgt bei dem letzten Beispiel der Fehler:

$$\frac{100 \,.\, 0{,}53185}{5{,}96815} = 8{,}9\,\%.$$

Für die Auftragshöhe 0,3 M. ist der Fehler 34,9 %
„ „ „ 3,0 M. „ „ „ 3,47 %.

b) In Fig. 7 bringen wir den Fall zur Darstellung, dass das Fallen nach der Mittellinie hin, auf der schmalen Profilseite stattfindet.

$$\frac{3}{2}\,x + 25\,x = 2{,}2$$

$$26{,}5\,x = 2{,}2$$

$$x = \frac{2{,}2}{26{,}5} = 0{,}0830 \text{ M.}$$

$$\triangle\, ABH = \frac{x \,.\, 2{,}2}{2} = 0{,}0830 \cdot \frac{2{,}2}{2} = 0{,}09130 \text{ □M.}$$

$$25\ y = 5{,}8 + \tfrac{3}{2}\ y$$

$$23{,}5\ y = 5{,}8$$

$$y = \frac{5{,}8}{23{,}5} = 0{,}2468 \text{ M.}$$

$$\triangle\ BCD = y \cdot \tfrac{5{,}8}{2} = 0{,}2468 \cdot \tfrac{5{,}8}{2} = 0{,}71572 \ \square\text{M.}$$

$$\triangle\ BCD - \triangle\ ABH = 0{,}71572 - 0{,}09130 = 0{,}62442 \ \square\text{M.}$$

In diesem Falle wird der Querschnitt durch das Quergefälle vergrössert, aber in grösserem Maasse wie in dem Falle, wenn die Bahnachse in der Mitte liegt. 6,5 □M. ist wieder der Querschnitt ohne Berücksichtigung des Quergefälles, 6,5 + 0,62442 = 7,12442 □M. ist daher der Querschnitt in dem vorliegenden Falle. Der Fehler bei Vernachlässigung des Quergefälles beträgt:

$$\frac{100\ .\ 0{,}62442}{7{,}12442} = 8{,}76\,\%.$$

Für die Auftragshöhe 0,3 M. ist der Fehler 22,6 %
„ „ „ 3,0 M. „ „ „ 4,13 %.

c) Die Resultate der Beispiele sub *a*) und *b*), lassen die Schlussfolgerung ziehen, dass, wenn die Achse des zweigeleisigen Bahnkörpers beim Bau des eingeleisigen Bahnkörpers als Trace angesehen wird, mit der Berücksichtigung des Quergefälles weiter gegangen werden muss, wie bis zu dem Neigungsverhältnisse 1 : 25, wenn nicht bei den geringen und mittleren Profil-Höhen bedeutende Unrichtigkeiten bei der Erdmassen-Berechnung vorkommen sollen.

Wir wollen nun sehen, zu welchen Fehlern die Vernachlässigung des halb so steilen Quergefälles, 1 : 50, unter den beregten Umständen führt, und zwar *d*) für den sub *a*) Fig. 6 angenommenen Fall.

Die Auftragshöhe sei zunächst wieder 1,0 M.

$$\tfrac{3}{2}\ x + 2{,}2 = 50\ x$$

$$48{,}5\ x = 2{,}2$$

$$x = \frac{2{,}2}{48{,}5} = 0{,}0453$$

$$\triangle\ ABE = \frac{x\ .\ 2{,}2}{2} = 0{,}0453 \cdot \tfrac{2{,}2}{2} = 0{,}04983 \ \square\text{M.}$$

$$50\ y + \tfrac{3}{2}\ y = 5{,}8$$

$$51{,}5\ y = 5{,}8$$

$$y = \frac{5{,}8}{51{,}5} = 0{,}1126$$

$$\triangle\ BCD = \frac{y\ .\ 5{,}8}{2} = \frac{0{,}1126\ .\ 5{,}8}{2} = 0{,}32654 \ \square\text{M.}$$

$$\triangle ABE - \triangle BCD = 0{,}04983 - 0{,}32654 = - 0{,}27671 \square\text{M.}$$

$$\text{Querschnitt} = 6{,}5 - 0{,}27671 = 6{,}22329 \square\text{M.}$$

Fehler bei Vernachlässigung des Quergefälles =

$$\frac{100 \,.\, 0{,}27671}{6{,}22329} = 4{,}45\,\%.$$

Für die Auftragshöhe 0,3 M. beträgt der Fehler 14,36 %
„ „ „ 3,0 M. „ „ „ 1,69 %.

e) Eür den sub *b*) Fig 7 angenommenen Fall, zunächst bei 1,0 M. Auftragshöhe.

$$x = \frac{2{,}2}{51{,}5} - 0{,}0427$$

$$\triangle ABH = \frac{x \,.\, 2{,}2}{2} = \frac{0{,}0427 \,.\, 2{,}2}{2} = 0.04697 \square\text{M.}$$

$$y = \frac{5{,}8}{48{,}5} = 0{,}1196 \text{ M.}$$

$$\triangle BCD = \frac{y \,.\, 5{,}8}{2} = \frac{0{,}1196 \,.\, 5{,}8}{2} = 0{,}34684 \square\text{M.}$$

$$\triangle BCD - \triangle ABH = 0{,}34684 - 0{,}04697 = 0{,}29987 \square\text{M.}$$

$$\text{Querschnitt} = 6{,}5 + 0{,}29987 = 6{,}79987 \square\text{M.}$$

Fehler bei Vernachlässigung des Quergefälles =

$$\frac{100 \,.\, 0{,}29987}{6{,}79987} = 4{,}41\,\%.$$

Für die Auftragshöhe 0,3 M. beträgt der Fehler 11,85 %
„ „ „ 3,0 M. „ „ „ 1,84 %.

f) Bei der Veranschlagung der Kosten für die Erdarbeiten hat man mit Auftrag und Abtrag gleichmässig zu thun; bei der Abrechnung für die Arbeitsleistung bei der Ausführung, wird die geförderte Masse allein nach dem Abtrage und nach den Seitenentnahmen ermittelt. Es wird daher von wesentlichem Interesse sein, kennen zu lernen, welchen Einfluss bei dem Abtrage die Vernachlässigung des Quergefälles von 1 : 50 auf die Richtigkeit des Resultates bei der in diesem Paragraphen vorausgesetzten Lage der Längenprofil-Ebene hat, und wollen wir daher

g) den Fall prüfen, wenn, wie in Fig. 8, das Steigen nach der Mittellinie hin auf der schmalen Profilseite stattfindet.

Die Abtragstiefe sei = 1,0 M.

$$\frac{3}{2} x + 50 x = 4{,}92$$

$$51{,}5 x = 4{,}92$$

$$x = \frac{4{,}92}{51{,}5} = 0{,}0955 \text{ M.}$$

$$\triangle\ ABC = \frac{x\ .\ 4{,}92}{2} = \frac{0{,}0955.\ 4{,}92}{2} = 0{,}234930\ \square\text{M.}$$

$$50\ y = 8{,}52 + \frac{3}{2}\ y$$

$$48{,}5\ y = 8{,}52$$

$$y = \frac{8{,}52}{48{,}5} = 0{,}1757\ \text{M.}$$

$$\triangle\ CDE = \frac{y\ .\ 8{,}52}{2} = \frac{0{,}1757\ .\ 8{,}52}{2} = 0{,}748482\ \square\text{M.}$$

$$\triangle\ CDE - \triangle\ ABC = 0{,}748482 - 0{,}234930 = 0{,}513552\ \square\text{M.}$$

der Querschnitts-Inhalt ohne Berücksichtigung des Quergefälles ist =

$$\frac{4{,}92 + 8{,}52 + 10{,}44}{2} \cdot 1{,}0 + \frac{2{,}32 + 0{,}94}{2} \cdot 0{,}46\ .\ 2 = 13{,}4396\ \square\text{M.}$$

wirklicher Querschnitts-Inhalt =

$$13{,}4396 + 0{,}513552 = 13{,}953152\ \square\text{M.}$$

Fehler bei Vernachlässigung des Quergefälles

$$= \frac{100\ .\ 0{,}513552}{13{,}953152} = 3.68\,\%.$$

Für die Abtragstiefe 0,3 M. beträgt der Fehler 8,27 %
„ „ „ 3,0 M. „ „ „ 1,61 %.

h) Das Fallen findet wie in Fig. 9 auf der schmalen Profilseite nach der Mittellinie hin statt.

Abtragstiefe = 1,0 M.

$$50\ x - 1{,}5\ x = 4{,}92$$

$$48{,}5\ x = 4{,}92$$

$$x = \frac{4{,}92}{48{,}5} = 0{,}1014\ \text{M.}$$

$$\triangle\ ABC = \frac{x\ .\ 4{,}92}{2} = \frac{0{,}1014\ .\ 4{,}92}{2} = 0{,}249444\ \square\text{M.}$$

$$50\ y + 1{,}5\ y = 8{,}52$$

$$51{,}5\ y = 8{,}52$$

$$y = \frac{8{,}52}{51{,}5} = 0{,}1654\ \text{M.}$$

$$\triangle\ CDE = \frac{y\ .\ 8{,}52}{2} = \frac{0{,}1654\ .\ 8{,}52}{2} = 0{,}704604\ \square\text{M.}$$

$$\triangle\ ABC - \triangle\ CDE = 0{,}249444 - 0{,}704604 = -\ 0{,}455160\ \square\text{M.}$$

Querschnitt ohne Berücksichtigung des Quergefälles wie sub *g*) = 13,4396 □M.; daher wirklicher Querschnitt =

$$13{,}4396 - 0{,}455160 = 12{,}984440\ \square\text{M.}$$

Fehler bei Vernachlässigung des Quergefälles

$$= \frac{100\ .\ 0{,}455160}{12{,}984440} = 3{,}51\,\%.$$

Für die Abtragstiefe 0,3 M. beträgt der Fehler 8,84 %
„ „ „ 3,0 M. „ „ „ 1,45 %.

In dem Falle sub *g*) wird der Querschnitt durch das Quergefälle vergrössert, in diesem Falle wird derselbe dadurch vermindert. Beide Abschnitte zeigen uns, dass, wenn die Bahnachse nicht in der Mitte des Normalprofils liegt, bei dem Abtrage der bei Vernachlässigung des Quergefälles entstehende Fehler zwar etwas kleiner wie bei dem Auftrage, aber namentlich bei den kleinern Abtragstiefen auch bei dem Neigungsverhältniss von 1 : 50 immerhin nicht unbedeutend ist, so dass bei der Voraussetzung, dass die Achse des zweigeleisigen Bahnkörpers Trace für den Bau des eingeleisigen Bahnkörpers ist, mindestens bis zu diesem Neigungsverhältniss das Quergefälle berücksichtigt werden muss.

§ 19.

Wie ändert sich der Einfluss des Quergefälles des Terrains, wenn die Böschungen des Bahnkörpers geringer oder stärker wie 1 : 1,5 geneigt sind?

Wir haben bisher vorausgesetzt, dass die Böschungen des Normalprofils das für Erdböschungen meistens angewandte Neigungsverhältniss 1 : 1,5 haben, oder dass, wie man technisch sich ausdrückt, die Böschungen $1\frac{1}{2}$füssig sind. Wir wollen uun zeigen, in welcher Weise durch ein flacheres und durch ein steileres Neigungsverhältniss der Böschungen des Normalprofils bei stattfindendem Quergefälle, unsere bisherigen Schlussfolgerungen modificirt werden. Bei diesen Untersuchungen soll die Trace wieder in der Mitte und ein Quergefälle von 1 : 25 angenommen werden.

a) Die Böschungen des Normalprofils haben ein flacheres Neigungsverhältniss wie 1 : 1,5, beispielsweise 1 : 2 (Fig. 10).

$$25\,x - 2\,x = 4{,}5$$
$$23\,x = 4{,}5$$
$$x = \frac{4{,}5}{23} = 0{,}1957 \text{ M.}$$

$$\triangle\, ABC = \frac{x \,.\, 4{,}5}{2} = \frac{0{,}1957 \,.\, 4{,}5}{2} = 0{,}44010 \;\square\text{M.}$$

$$25\,y + 2\,y = 4{,}5$$
$$27\,y = 4{,}5$$
$$y = \frac{4{,}5}{27} = 0{,}1667 \text{ M.}$$

$$\triangle\, CDE = \frac{y \,.\, 4{,}5}{2} = \frac{0{,}1667 \,.\, 4{,}5}{2} = 0{,}37485 \;\square\text{M.}$$

$\triangle ABC - \triangle CDE = 0{,}44010 - 0{,}37485 = 0{,}06525$ □M.

Querschnitt ohne Berücksichtigung des Quergefälles =

$$\frac{2{,}5 + 2{,}5 + 4{,}5 + 4{,}5}{2} \cdot 1{,}0 = 7{,}0 \text{ □M.}$$

Wirklicher Querschnitt = 7,0 + 0,06525 = 7,06525 □M.

Fehler bei Vernachlässigung des Quergefälles =

$$\frac{100 \,.\, 0{,}06525}{7{,}06525} = 0{,}92\,\%.$$

Bei $1\frac{1}{2}$füssigen Böschungen des Normalprofils betrug unter sonst gleichen Umständen der Fehler 0,59 %, war daher kleiner, und man kann allgemein behaupten, dass, je flacher die Böschungen des Normalprofils sind, desto grösser der Fehler bei Vernachlässigung des Quergefälles sein wird, oder dass bei flacheren Böschungen des Normalprofils auch sehr geringe Quergefälle des Terrains berücksichtigt werden müssen.

b) Die Böschungen des Normalprofils haben ein steileres Neigungsverhältniss wie 1 : 1,5, beispielsweise 1 : 1 (Fig. 11).

$$25\,x - x = 3{,}5$$
$$24\,x = 3{,}5$$
$$x = \frac{3{,}5}{24} = 0{,}1458 \text{ M.}$$

$$\triangle ABC = \frac{x \,.\, 3{,}5}{2} = \frac{0{,}1458 \,.\, 3{,}5}{2} = 0{,}25515 \text{ □M.}$$

$$25\,y + y = 3{,}5$$
$$26\,y = 3{,}5$$
$$y = \frac{3{,}5}{26} = 0{,}1346 \text{ M.}$$

$$\triangle CDE = \frac{y \,.\, 3{,}5}{2} = \frac{0{,}1346 \,.\, 3{,}5}{2} = 0{,}23555 \text{ □M.}$$

$\triangle ABC - \triangle CDE = 0{,}25515 - 0{,}23555 = 0{,}01960$ □M.

Querschnitt ohne Berücksichtigung des Quergefälles =

$$\frac{2{,}5 + 2{,}5 + 3{,}5 + 3{,}5}{2} \cdot 1{,}0 = 6{,}0 \text{ □M.}$$

Wirklicher Querschnitt = 6,0 + 0,01960 = 6,01960 □M.

Fehler bei Vernachlässigung des Quergefälles =

$$\frac{100 \,.\, 0{,}01960}{6{,}01960} = 0{,}33\,\%.$$

Hiernach ist zu schliessen, dass, je steiler die Böschungen des Normalprofils sind, desto kleiner der Fehler bei Vernachlässigung des Quergefälles sein wird, oder dass bei steileren Böschungen des Normalprofils

sehr geringe Quergefälle des Terrains bei der Erdmassen-Berechnung nicht berücksichtigt werden müssen.

Ist das Neigungsverhältniss 1 : 0, d. h. hat der Körper senkrechte Wände, so werden die Dreiecke ABC und CDE bei B und bei D rechtwinklig und congruent, und das Quergefälle des Terrains bleibt auf den Inhalt des Querschnittes ohne Einfluss, so lange wie die Terrain-Profillinie HI in jene senkrechten Wände und nicht in die Kronlinie FG einschneidet.

Bemerkung. Zur Begründung der Richtigkeit des weiterhin zu beschreibenden Verfahrens bei Erdmassen-Berechnungen, ist es nothwendig, dass wir uns zuvörderst mit einigen Körpern beschäftigen, die in den stereometrischen Lehrbüchern nicht abgehandelt werden.

§ 20.

Ein Körper, dessen normaler Querschnitt ein Rechteck oder Parallelogramm ist, und dessen Oberfläche eine windschiefe Fläche ist.

Zunächst handelt es sich um den Fig. 12 im Grundriss und Aufriss gezeichneten Körper. Die 4 Seitenflächen sind je zwei und zwei parallel zu einander, so dass im Grundriss ein Rechteck oder Parallelogramm entsteht; in der Figur ist ein Rechteck gezeichnet, weil qu. Körper zu dem beregten Zwecke meistens in dieser Form zur Anwendung kommt; die Seitenflächen sind Parallel-Trapeze, die Oberfläche des Körpers ist eine windschiefe Fläche.

a) Von einer Kante der Oberfläche nach der gegenüberliegenden Kante, parallel zu 2 Seitenflächen, können, wie in der Figur angedeutet ist, unendlich viele gerade Linien gedacht werden. Es entstehen solcherweise 2 Liniensysteme, und ein jeder Punkt der windschiefen Oberfläche ist als Schnittpunkt einer Linie des einen Systems mit einer Linie des andern Systems anzusehen.

Es folgt hieraus, dass, wenn die Lage der Horizontalprojection irgend eines Punktes der Oberfläche bekannt ist, seine Höhe auf zweifache Weise ermittelt werden kann, wie in den nachfolgenden Beispielen gezeigt werden soll.

Punkt I liege in der Mitte,

dann ist die Höhe für $N = \frac{8 + 12}{2} = 10,$

$$\text{für } O = \frac{20 + 15}{2} = 17{,}5,$$

$$\text{für } I = \frac{10 + 17{,}5}{2} = 13{,}75,$$

oder es ist die Höhe für $W = \frac{12 + 15}{2} = 13{,}5,$

$$\text{für } X = \frac{8 + 20}{2} = 14,$$

$$\text{für } I = \frac{13{,}5 + 14}{2} = 13{,}75 \text{ wie vor.}$$

Liegt Punkt K derart, dass $LK = \frac{1}{5}\, EF$ und $TK = \frac{1}{4}\, EH$, so ist die Höhe für $L = \frac{12 - 8}{4} + 8 = 9,$

$$\text{für } M = 20 - \frac{20 - 15}{4} = 18{,}75,$$

$$\text{für } K = 9 + \frac{18{,}75 - 9}{5} = 10{,}95,$$

oder es ist die Höhe für $S = \frac{15 - 12}{5} + 12 = 12{,}6,$

$$\text{für } F = \frac{20 - 8}{5} + 8 = 10{,}40,$$

$$\text{für } K = \frac{12{,}6 - 10{,}4}{4} + 10{,}40 = 10{,}95 \text{ wie vor.}$$

Liegt Punkt P derart, dass $QP = 8{,}2$ M. und $PU = 1{,}9$ M., so ist die Höhe für $Q = 12 - \frac{12 - 8}{16} \cdot 1{,}9 = 11{,}525,$

$$\text{für } R = 15 + \frac{20 - 15}{16} \cdot 1{,}9 = 15{,}59375,$$

$$\text{für } P = 11{,}525 + \frac{15{,}59375 - 11{,}525}{10} \cdot 8{,}2 = 14{,}861375,$$

oder es ist die Höhe für $U = 12 + \frac{15 - 12}{10} \cdot 8{,}2 = 14{,}46,$

$$\text{für } V = 8 + \frac{20 - 8}{10} \cdot 8{,}2 = 17{,}84,$$

$$\text{für } P = 14{,}46 + \frac{17{,}84 - 14{,}46}{16} \cdot 1{,}9 = 14{,}861375 \text{ wie vor.}$$

Um die Beschaffenheit der windschiefen Oberfläche zu veranschaulichen, haben wir in Fig. 12c, die beiden diagonalen Schnitte dargestellt.

In dieser Figur ist die mit der concaven Seite nach oben gekehrte ausgezogene krumme Linie die Schnittlinie einer in der Richtung DB des Grundrisses stehenden Vertikalebene mit der windschiefen Oberfläche, die mit der convexen Seite nach oben gekehrte punktirte krumme Linie, die Schnittlinie einer in der Richtung AC des Grundrisses stehenden Vertikalebene mit der windschiefen Oberfläche.

Die Höhen der einzelnen Punkte jener krummen Schnittlinien sind der resp. Lage der Punkte im Grundrisse nach, aus dem Aufrisse ermittelt.

Die geraden Diagonallinien durchschneiden die in der Mitte des Grundrisses gedachte Vertikallinie und sind dort

$\frac{12 + 20}{2} - \frac{8 + 15}{2} = 16 - 11{,}5 = 4{,}5$ M. von einander entfernt;

die gekrümmten Diagonallinien schneiden einander und jene Vertikallinie in einem Punkte, welcher in der Mitte jenes eben bezeichneten Abstandes liegt; denn vergleichen wir die Differenzen von $YZ - Ya$ und $YZ - YI$, so ist die erstere Differenz

$$\text{wie oben} = \frac{12 + 20}{2} - \frac{8 + 15}{2},$$

die zweite Differenz ist zunächst =

$$\frac{12 + 20}{2} - \left(\frac{12 + 15}{2} + \frac{8 + 20}{2}\right) \frac{1}{2}, \text{ dafür}$$

$$\frac{12 + 20}{2} - \frac{12 + 20 + 8 + 15}{4}, \text{ dafür}$$

$$\frac{12 + 20}{2} - \frac{12 + 20}{4} - \frac{8 + 15}{4}, \text{ dafür}$$

$$\frac{12 + 20}{4} - \frac{8 + 15}{4};$$ dies ist aber die Hälfte von dem ersten Differenzen-Werth, d. h. es ist $YZ - YI = IZ = \frac{1}{2}(YZ - Ya) = \frac{1}{2} aZ$.

Die beiden Diagonalen weichen am meisten von den beiden Richtungen ab, in welchen gerade Linien in der windschiefen Oberfläche gedacht werden können, und sind daher auch unter allen gekrümmten Linien, die in der windschiefen Oberfläche gedacht werden können, die am meisten gekrümmten; je mehr sich die in der windschiefen Oberfläche gedachten Linien der Parallelität zu einem Seitenflächenpaare des Körpers nähern, desto mehr nähern sie sich auch der Geraden. Es ist noch

b) zu beweisen, dass ausser den sub *a*) bezeichneten geraden Linien keine geraden Linien in der windschiefen Oberfläche möglich sind.

Denkt man eine mit den Seitenflächen nicht parallele gerade Verbindungslinie zwischen zwei obern Kanten des Körpers, z. B. TU, so kann diese gerade Linie nicht mit der windschiefen Oberfläche zusammenfallen; denn wäre dies der Fall, so würden die in der windschiefen Fläche liegenden, mit den Seitenflächen $AEDH$ und $BFCG$ parallelen geraden Linien zwischen TS und VU sowohl die Kante TB als auch die Linie TU schneiden, und deshalb in die durch TB und TU gedachte Ebene hineinfallen, woraus gegen die Voraussetzung folgen würde, dass die Oberfläche des Körpers eine Ebene ist. In derselben Weise lässt sich für jede andere mit den Seitenflächen des Körpers nicht parallele gerade Verbindungslinie von zwei Punkten der obern Kanten, der Beweis führen, dass sie nicht in die windschiefe Oberfläche fallen kann, und es sind daher ausser in den beiden oben angegebenen Richtungen keine geraden Linien in dieser windschiefen Fläche möglich

c) Inhalts-Berechnung.

Den qu. Körper kann man sich nun in, den vorerwähnten Parallellinien entsprechende, den Seitenflächen $AEHD$ und $BFGC$ parallele gleich starke Schnittkörper zerlegt denken.

Ist die Stärke der Schnittkörper oder der Abstand der Schnittebenen von einander nahezu unendlich klein, die Anzahl der Schnittebenen also nahezu unendlich gross, so ist ein solcher Schnittkörper als ein Prisma von nahezu unendlich kleiner Höhe anzusehen, die Schnittflächen sind die Grundflächen dieser Prismen.

Diese Grundflächen sind Parallel-Trapeze, die alle eine gleich grosse Grundlinie $= EH = FG$ haben; die Seitenlinien dieser Trapeze sind paralle den Vertikalkanten des Körpers, und stellen in der Vorderfläche $AEFB$ desselben, sämmtliche Werthe zwischen AE und BF, in der Hinterfläche $DHGC$ sämmtliche Werthe zwischen DH und CG dar.

Nennen wir die Seitenlinien der Trapeze in der Vorderfläche h_1, h_2, $h_3, \ldots . h_n$, die Seitenlinien derselben in der Hinterfläche $H_1, H_2, H_3, \ldots . H_n$,
den Abstand der Vorderfläche des Körpers von der Hinterfläche e,
den Abstand der Schnittebenen von einander s,
die Anzahl der Schnittebenen n,
die Seitenkanten AE, BF, CG und DH des Körpers resp. a, b, c und d,
so ist der Inhalt des Körpers

$$I = \left(\frac{a+d}{2} + \frac{h_1+H_1}{2} + \frac{h_2+H_2}{2} + \frac{h_3+H_3}{2} + \ldots . \frac{h_n+H_n}{2}\right) s \cdot e.$$

$$I = \left[(a + h_1 + h_2 + h_3 + \ldots . h_n)\, s + (d + H_1 + H_2 + H_3 + \ldots H_n) s\right] \frac{e}{2}.$$

Nun ist aber
$(a + h_1 + h_2 + h_3 + \ldots . h_n)\, s = F$ (Vorderfläche des Körpers),
$(d + H_1 + H_2 + H_3 + \ldots . H_n) s = F_1$ (Hinterfläche des Körpers),
daher

Formel 11. $I = (F + F_1) \frac{e}{2}$,

Formel 12. $\left(\frac{F + F_1}{2}\right) \cdot e.$

Ist die Breite des Körpers $= g$, so ist

$$F = \frac{a+b}{2} \cdot g,$$

$F_1 = \frac{d+c}{2} \cdot g$, daher

$$I = (a + b + c + d) \frac{g}{2} \cdot \frac{e}{2},$$

Formel 13. $I = \frac{(a + b + e + d)}{4} e \,.\, g.$

Es ist also der Inhalt des Körpers entweder gleich dem Product

aus dem arithmetischen Mittel von Vorder- und Hinterfläche in den Abstand dieser Flächen von einander; oder gleich

dem Product aus dem vierten Theil der Summe der 4 Vertikalkanten und der Grundfläche resp. normalen Querschnittsfläche des Körpers.

Der gegebene Körper würde darnach berechnet werden:

$$F = \frac{8 + 20}{2} \cdot 10 = 140 \text{ □M.}$$

$$F_1 = \frac{12 + 15}{2} \cdot 10 = 135 \text{ □M.}$$

$$I = \frac{140 + 135}{2} \cdot 16 = 2200 \text{ Cbkm.}$$

oder

$$I = \frac{8 + 20 + 15 + 12}{4} \cdot 16 \cdot 10 = 2200 \text{ Cbkm.}$$

Zerlegen wir denselben Fig. 13 im Grundrisse noch einmal dargestellten Körper in dreiseitige schief abgeschnittene Prismen, so kann die Schnittebene entweder von A nach C oder von B nach D gelegt werden; im erstern Falle würde der körperliche Inhalt sein:

$$\left(\frac{8 + 20 + 15}{3} + \frac{15 + 12 + 8}{3}\right)\frac{16 \,.\, 10}{2} = 2080 \text{ Cbkm.}$$

im zweiten Falle:

$$\left(\frac{8 + 20 + 12}{3} + \frac{20 + 15 + 12}{3}\right)\frac{16 \,.\, 10}{2} = 2320 \text{ Cbkm.}$$

Diese Zerlegung führt zu falschen Resultaten, weil die Oberfläche des Körpers eine windschiefe Fläche ist; in dem ersten Fall wird der Inhalt zu klein gefunden, in dem zweiten Falle zu gross, das arithmetische Mittel aus beiden Resultaten ist der Inhalt des Körpers, wie er oben richtig ermittelt worden ist,

denn es ist

$$\frac{2080 + 2320}{2} = 2200 \text{ Cbkm.}$$

Algebraisch lässt sich die letzte Behauptung wie folgt erweisen:

Die Inhalte der 4 theilweise mit dem Körper Fig. 13 zusammenfallenden schief abgeschnittenen Prismen sind:

$$\frac{a + b + d}{3} \cdot \frac{g \,.\, e}{2}$$

$$\frac{b + c + d}{3} \cdot \frac{g \,.\, e}{2}$$

$$\frac{a + b + c}{3} \cdot \frac{g \,.\, e}{2}$$

$$\frac{a + c + d}{3} \cdot \frac{g \,.\, e}{2}$$

zusammen

$$\left(a + b + d + b + c + d + a + b + c + a + c + d\right)\frac{g \cdot e}{6}$$

zusammengezogen:

$$\left(3a + 3b + 3c + 3d\right)\frac{g \cdot e}{6}$$

oder

$$\left(a + b + c + d\right)\frac{g \cdot e}{2}, \text{ und } \tfrac{1}{2} \text{ davon}$$

$$= \left(\frac{a + b + c + d}{4}\right) c \,.\, g \text{ wie der Werth für } I \text{ in Formel 13.}$$

d) Das Criterium dafür, ob der Körper Fig. 13 und Fig. 14 eine windschiefe Oberfläche hat, ist, dass

$a + c \lessgtr b + d$ ist; denn ist

$a + c = b + d$, so ist auch

$$\frac{a + c}{2} = \frac{b + d}{2};$$

wenn aber diese Gleichung gilt, so haben die Linien AC und BD einen Punkt mit einander gemein und schneiden sich daher; durch die sich schneidenden Linien ist eine Ebene bestimmt, welche die Oberfläche des Körpers bildet. Umgekehrt muss $a + c = b + d$ sein, wenn der Körper eine Ebene zur Oberfläche haben soll.

e) Hat der Fig. 14 im Grundriss dargestellte Körper ein Parallelogramm zur Grundfläche und eine windschiefe Oberfläche, so lassen sich parallel zu den beiden Seitenflächenpaaren wieder gerade Linien in der windschiefen Oberfläche denken, ferner ist, wenn a, b, c und d die Seitenkanten sind, wiederum

$$I = \frac{a + b + c + d}{4} \cdot e \cdot g,$$

f) Die Formeln 11. bis 13. gelten auch dann, wenn die Grundfläche, sowie die Oberfläche des Körpers, eine windschiefe Fläche ist, alleinige Bedingung ist eben nur, dass die gegenüberstehenden Seitenflächen zu einander parallel sind, weil dann der Körper sich stets in Prismen zerlegen lässt, die 2 gleiche Dimensionen haben, worauf, wie aus dem Obigen hervorgeht, die Entwickelung der Formeln für den Inhalt beruht.

§ 21.

Ein Körper, dessen normaler Querschnitt ein Paralleltrapez, und dessen Oberfläche eine windschiefe Fläche ist.

Die Fig. 15 stellt einen prismatischen Körper mit trapezförmigem normalem Querschnitt und windschiefer Oberfläche im Grundriss dar.

Die Höhen der Seitenkanten seien a, b, c und d, die normale Querschnittsebene schneidet die parallelen Seitenflächen in den Linien g und k.

a) Denkt man die nicht parallelen Seitenflächen verlängert, so schneiden sie sich in der Kante, deren Projection der Punkt P ist, die Oberkanten dieser Seitenflächen schneiden einander jedoch nicht, weil andernfalls die Oberfläche des Körpers eine Ebene sein müsste.

b) Jeder Punkt der windschiefen Oberfläche ist wieder als Schnittpunkt von je zwei Linien, deren Lage im Raume bekannt ist, völlig bestimmt. Es kann nämlich die windschiefe Oberfläche einmal entstehend gedacht werden, durch von einer Oberkante zur gegenüberstehenden Oberkante gehende, parallel zu den parallelen Seitenflächen liegende gerade Linien; ferner durch Proportionallinien, welche die Oberkanten der parallelen Seitenflächen des Körpers verbinden, und die Kante, deren Horizontalprojection P ist, schneiden; diese Linien-Systeme schneiden sich für jeden Punkt der windschiefen Oberfläche paarweise, und umgekehrt bildet die Summe dieser Schnittpunkte die windschiefe Fläche.

Wir wollen dieses an einem Beispiele erläutern.

Der Punkt Q liege in der windschiefen Oberfläche, seine Horizontal-Projection sei derart bekannt, dass $CO = \frac{5}{16}\ BC$ und $MC = \frac{1}{4}\ CD$, und es handele sich darum, die Höhe des Punktes Q über der Grundfläche zu bestimmen.

Bedienen wir uns dazu zunächst der Parallellinie RO, so ist die Höhe von R über der Grundfläche $=$

$$8{,}0 + (16{,}0 - 8{,}0)\ \tfrac{5}{16} = 10{,}5,$$

von O

$$24{,}0 - (24{,}0 - 4{,}0)\ \tfrac{5}{16} = 17{,}75,$$

und da $OQ = \frac{1}{4}\ RO$, so ist die Höhe von Q über der Grundfläche

$$17{,}75 - (17{,}75 - 10{,}50)\ \tfrac{1}{4} = 15{,}9375.$$

Bedienen wir uns zur Bestimmung der Höhe des Punktes Q über der Grundfläche, der Proportionallinie TM, so ist die Höhe von T über der Grundfläche

$$4{,}0 + (16{,}0 - 4{,}0)\ \tfrac{1}{4} = 7{,}0,$$

von M

$$24{,}0 - (24{,}0 - 8{,}0)\ \tfrac{1}{4} = 20{,}0,$$

und da $MQ = \frac{5}{16}$ von MT, so ist die Höhe von Q über der Grundfläche

$$20{,}0 - (20{,}0 - 7{,}0)\ \tfrac{5}{16} = 15{,}9375;$$

es ist in beiden Fällen für die Höhe des Punktes Q der windschiefen

Oberfläche über der Grundfläche, dasselbe Resultat gefunden; die Linien RO und TM schneiden sich daher in dem Punkte Q. Was für den Punkt Q gilt, ist für jeden andern Punkt der windschiefen Oberfläche analog nachzuweisen.

c) Ausser den beiden beschriebenen Linien-Systemen lassen sich in 3 verschiedenen Arten Verbindungslinien zwischen den Kanten der windschiefen Oberfläche des Körpers denken; alle diese Linien fallen jedoch in die windschiefe Fläche nicht hinein, d. h. ausser den Linien-Systemen sub *b*) sind keine geraden Linien in qu. windschiefer Fläche denkbar.

Beweis.

Erstens kann eine Verbindungslinie RI von der Kante AD nach der Kante DC gedacht werden.

Fiele die gerade Linie RI in die windschiefe Fläche, so würde sie sämmtliche zwischen DC und RO liegende, mit der Vorder- und Hinterfläche des Körpers parallele Linien der windschiefen Fläche schneiden, diese Linien hätten dann mit der durch RD und RI gelegten Ebene zwei Punkte gemein, und fielen dann in diese Ebene, in dem Falle liegen auch die Linien AD und BC in einer Ebene, und die Oberfläche des Körpers ist eine Ebene, und nicht eine windschiefe Fläche, was gegen die Voraussetzung ist; die gerade Linie RI kann daher nicht in die windschiefe Fläche fallen.

Zweitens kann eine Verbindungslinie UO von der Kante AD nach der Kante BC gedacht werden.

Fiele UO in die windschiefe Fläche, so würden die geraden Linien zwischen RO und UV geschnitten werden, woraus wieder gegen die Voraussetzung resultiren würde, dass $ABCD$ eine Ebene ist, es ist daher auch nicht in der Richtung UO eine gerade Linie in der windschiefen Fläche denkbar.

Drittens kann eine Verbindungslinie TI von der Kante AB nach der Kante CD gedacht werden.

Fiele TI in die windschiefe Fläche, so würden die geraden Proportionallinien zwischen TM und PI von der Linie TI geschnitten, und wird durch DC und TI eine Ebene gedacht, so hat jede der Proportionallinien 2 Punkte mit dieser Ebene gemein, die Proportionallinien liegen daher in der Ebene, und die Oberfläche des Körpers ist der Voraussetzung entgegen nicht eine windschiefe Fläche; es kann deshalb in der Richtung TI ebenfalls keine gerade Linie in der windschiefen Oberfläche gedacht werden.

d) Wie ist aus den gegebenen Stücken festzustellen, ob die Oberfläche des Körpers Fig. 15 eine Ebene ist, oder eine windschiefe Fläche?

Wenn $ABCD$ eine Ebene ist, so muss

$$\frac{a+b+d}{3}\cdot\frac{g\cdot e}{2}+\frac{b+c+d}{3}\cdot\frac{k\cdot e}{2}=\frac{a+b+c}{3}\cdot\frac{g\cdot e}{2}+\frac{a+c+d}{3}\cdot\frac{k\cdot e}{2}$$

sein; dann ist

$$(a+b+c-a-b-d)\,g\cdot e=(b+c+d-a-c-d)\,k\cdot e$$

$$(c-d)\,g=(b-a)\,k$$

oder

Formel 14. $k:g=c-d:b-a.$

Trifft diese Proportion für die gegebenen Stücke zu, so ist die qu. Oberfläche eine Ebene, andernfalls ist sie eine windschiefe Fläche.

e) Ableitung einer Formel für die Berechnung des Inhaltes des Körpers Fig. 15.

Denken wir uns den Körper durch $n-1$ mit der Vorder- und der Hinterfläche parallele Ebenen in n scheibenartige Theile zerlegt, so ist, wenn die Proportionallinie WL die Mitte der Kante AB mit mit der Mitte der Kante DC verbindet, und

$$r=\frac{a+b}{2}$$

$$s=\frac{c+d}{2}\text{ ist,}$$

der körperliche Inhalt, wenn s grösser wie r angenommen wird, und die Dicke der scheibenartigen Körper $=t$ ist,

$$I=\left[g\cdot r+\left(g+\frac{k-g}{n}\right)\left(r+\frac{s-r}{n}\right)+\left(g+2\cdot\frac{k-g}{n}\right)\left(r+2\cdot\frac{s-r}{n}\right)+\cdots k\cdot s\right]t;$$

d. h. gleich der Summe der scheibenartigen Theilkörper.

Die Werthe für diese Theilkörper können wir nun in einer solchen Weise darstellen, dass ihre Gesammtheit einen Körper bildet, welcher nur von Ebenen begrenzt ist.

In Fig. 16 ist dieser Körper im Grundriss dargestellt; derselbe ist entsprechend dem Körper Fig. 15 zur bessern Veranschaulichung aus 16 scheibenartigen Theilkörpern zusammengesetzt; und es sind die analogen Theilkörper der Figuren 15 und 16 von gleichem Inhalt. Ein jeder Theil des obigen Ausdruckes für I entspricht einem scheibenartigen Theilkörper in Fig. 16.

Es handelt sich nunmehr nur darum, für den Inhalt des Körpers Fig. 16, dessen Höhe entsprechend dem Abstand von Vorder- und Hinterfläche in Fig. 15. $=e$ ist, den Ausdruck zu bilden.

Es ist $$I=g\cdot r\cdot e+\frac{2g+k}{3}\left(\frac{s-r}{2}\right)e+\frac{2r+s}{3}\left(\frac{k-g}{2}\right)e$$

$$I=\left[g\cdot r+\frac{(2g+k)(s-r)+(2r+s)(k-g)}{6}\right]e$$

$$I = \left(6g \cdot r + 2g \cdot s + k \cdot s - 2g \cdot r - k \cdot r + 2k \cdot r + k \cdot s - 2g \cdot r - g \cdot s\right)\frac{e}{6}$$

$$I = \left(2g \cdot r + g \cdot s + k \cdot r + 2k \cdot s\right)\frac{e}{6}$$

Formel 15. $I = \left[(2r + s)\, g + (r + 2s)\, k\right]\frac{e}{6}$,

und da $r = \frac{a + b}{2}$

$s = \frac{c + d}{2}$ ist, so ist

$$I = \left[\left(a + b + \frac{c + d}{2}\right) g + \left(\frac{a + b}{2} + c + d\right) k\right]\frac{e}{6}$$

Formel 16. $I = \left[(2a + 2b + c + d)\, g + (a + b + 2c + 2d)\, k\right]\frac{e}{12}$.

Ist $g = k$, d. h. ist die Grundfläche des Körpers ein Rechteck, so ist

$$I = \left(2a + a + 2b + b + 2c + c + 2d + d\right)\frac{g \cdot e}{12}$$

$$I = 3\left(a + b + c + d\right)\frac{g \cdot e}{12}$$

$I = \left(\frac{a + b + c + d}{4}\right) g \cdot e$ wie in Formel 13.

Werden die Höhen a und d Fig. 15 $= 0$, so wird Formel 16.

$$I = \left[(2 \cdot 0 + 2b + c + 0)\, g + (0 + b + 2c + 2 \cdot 0)\, k\right]\frac{e}{12}$$

Formel 17. $I = \left[(2b + c)\, g + (b + 2c)\, k\right]\frac{e}{12}$.

Ist Fig. 15 r grösser als s, so ist

$$I = \left[g \cdot r + \left(g + \frac{k - g}{n}\right)\left(r - \frac{r - s}{n}\right) + \left(g + 2 \cdot \frac{k - g}{n}\right)\left(r - 2 \cdot \frac{r - s}{n}\right) + \ldots k \cdot s\right]t.$$

Fig. 17 stellt einen nur von Ebenen begrenzten Körper dar, welcher diesem Ausdruck entspricht.

Bei diesem Körper ist

$$I = \left(\frac{g + k}{2}\, e \cdot s + \left(\frac{2g + k}{3}\right)\left(\frac{r - s}{2}\right) e\right.$$

$$I = \left(\frac{g \cdot s + k \cdot s}{2} + \frac{2g \cdot r + k \cdot r - 2g \cdot s - k \cdot s}{6}\right) e.$$

$$I = \left(3g \cdot s + 3k \cdot s + 2g \cdot r + k \cdot r - 2g \cdot s - k \cdot s\right)\frac{e}{6}.$$

$I = \left[(2r + s)\, g + (r + 2s)\, k\right]\frac{e}{6}$ wie Formel 15.,

und da wieder $r = \frac{a + b}{2}$

$s = \frac{c + d}{2}$, so ist auch wie in Formel 16.:

$$I = \left[(2a + 2b + c + d)\, g + (a + b + 2c + 2d)\, k\right]\frac{e}{12}.$$

Ist $r = s$, so fallen in den beiden (für $r < s$ und für $r > s$) ursprünglichen Gleichungen, die wir für den Inhalt des Körpers Fig. 15 aufgestellt haben, die Werthe $\frac{s-r}{n}$, $2 \cdot \frac{s-r}{n} \ldots\ldots n \frac{(s-r)}{n}$ und $\frac{r-s}{n}$, $2 \cdot \frac{r-s}{n} \ldots\ldots n \frac{(r-s)}{n}$ fort, und aus beiden Gleichungen wird derselbe Werth

$$I = \left[g \cdot r + \left(g + \frac{k-g}{n}\right) r + \left(g + 2 \cdot \frac{k-g}{n}\right) r + \ldots\ldots k \cdot r\right] t,$$

d. h. alle scheibenartigen Theile des Körpers haben ausser der Dicke t noch den Factor r gemeinschaftlich, und es ist

$$I = \left[g + \left(g + \frac{k-g}{n}\right) + \left(g + 2 \cdot \frac{k-g}{n}\right) + \ldots\ldots k\right] t \cdot r.$$

Der eine Factor ist eine arithmetische Progression; die Anzahl der Glieder derselben ist gleich der Anzahl der scheibenartigen Theilkörper, $= n$; die Summe der Progression ist dann $= \left(g + k\right) \frac{n}{2}$, diesen Werth in die Gleichung für I eingesetzt, giebt

$$I = \left(g + k\right) \frac{n}{2} \cdot t \cdot r = \left(\frac{g+k}{2}\right) n \cdot t \cdot r.$$

$n \cdot t$ ist aber $= e$, folglich ist

$$I = \left(\frac{g+k}{2}\right) e \cdot r,$$

und da $r = s = \frac{a+b}{2} = \frac{c+d}{2}$, daher

$$2r = \frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2} = \frac{a+b+c+d}{2}$$

$$r = \frac{a+b+c+d}{4} \text{ ist,}$$

so wird, diesen Werth für r substituirt,

$$I = \left(\frac{g+k}{2}\right) e \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right), \text{ analog der Formel 13.}$$

Formen wir den Werth für I noch weiter um.

$$I = \left[\left(\frac{a+b}{4}\right) + \left(\frac{c+d}{4}\right)\right] \left(g + k\right) \frac{e}{2}$$

und da $a + b = c + d$ ist,

$$I = \left[\left(\frac{a+b}{4} + \frac{a+b}{4}\right) g + \left(\frac{c+d}{4} + \frac{c+d}{4}\right) k\right] \frac{e}{2}$$

$$I = \left[\frac{(a+b)}{2} g + \frac{(c+d)}{2} k\right] \frac{e}{2}.$$

Dieser Werth für I ergiebt sich auch aus Formel 16., wenn man den Werth für I in dieser Formel, darnach modificirt, dass $a + b = c + d$ in dem vorliegenden Falle ist; es ist dann zunächst:

$$I = \left[(3a + 3b) g + (3c + 3d) k\right] \frac{e}{12}, \text{ dafür}$$

$$I = \left[(a+b)\,g + (c+d)\,k\right]\frac{e}{4}$$

$$I = \left[\frac{(a+b)}{2}\,g + \frac{(c+d)}{2}\,k\right]\frac{e}{2}$$ wie vor.

Nennen wir wieder die Vorderfläche des Körpers F, die Hinterfläche F_1, so ist $F = \frac{(a+b)}{2}\,g$

$$F_1 = \frac{(c+d)}{2}\,k,$$

und wir können hiernach den letzten Ausdruck für I umändern in

$I = \left(F + F_1\right)\frac{e}{2}$, wie Formel 11.

f) Vergleichen wir, wie sich in verschiedenen Fällen die Resultate bei Anwendung der empirischen Inhalts-Berechnungs-Methode *a*), Mitteln der Profile etc. zu den Resultaten, welche die Anwendung von Formel 16. gewährt, gestalten.

Nach dieser Formel ist

$$I = \left[(2a + 2b + c + d)\,g + (a + b + 2c + 2d)\,k\right]\frac{e}{12}.$$

Nach jener empirischen Methode ist

$$I = \left[\frac{(a+b)}{2}\,g + \frac{(c+d)}{2}\,k\right]\tfrac{1}{2}\cdot e.$$

Lösen wir die rechte Seite der ersten Gleichung auf, so ist dieselbe:

$$\frac{2age}{12} + \frac{2bge}{12} + \frac{cge}{12} + \frac{dge}{12} + \frac{ake}{12} + \frac{bke}{12} + \frac{2cke}{12} + \frac{2dke}{12}$$

die 2. Gleichung ist

$$= \frac{age}{4} + \frac{bge}{4} + \frac{cke}{4} + \frac{dke}{4}$$

Differenz

$$= -\frac{age}{12} - \frac{bge}{12} + \frac{cge}{12} + \frac{dge}{12} + \frac{ake}{12} + \frac{bke}{12} - \frac{cke}{12} - \frac{dke}{12}$$

dafür

$$\left[\left[(c+d) - (a+b)\right]g + \left[(a+b) - (c+d)\right]k\right]\frac{e}{12}.$$

Ist die Summe der an der kleinern Seite liegenden Höhen kleiner wie die Summe der an der grösseren Seite liegenden Höhen, also

$a + b < c + d$, so ist

$(c + d) - (a + b) = + u$

$(a + b) - (c + d) = - u.$

Diese Werthe eingesetzt, giebt für die Differenz

$$\left(ug - uk\right)\frac{e}{12} = \left(g - k\right)\frac{u \cdot e}{12}.$$

Da g kleiner als k ist, so wird der Werth für die Differenz nach obiger Gleichung negativ, d. h. wenn $a + b < c + d$, so wird bei Anwendung

der empirischen Methode *a*) das Resultat zu gross; denn es muss, um dasselbe auf den richtigen Werth zu bringen, jener Differenz-Werth abgezogen werden.

Ist $a + b = c + d$, so ist

$(c + d) - (a + b) = 0$, ebenso

$(a + b) - (c + d) = 0$, und die Differenz der beiden Gleichungen für den Inhalt ist dann auch $= 0$; in diesem Falle wird daher das Resultat bei Anwendung der empirischen Methode *a*) richtig. (Siehe am Ende sub *e*).

Ist $a + b > c + d$, so ist

$(c + d) - (a + b) = - u$

$(a + b) - (c + d) = + u$,

der Werth für die Differenz ist $=$

$$\left(-ug + uk\right)\frac{e}{12} = \left(k - g\right)\frac{ue}{12};$$

dieser Werth ist mit dem Werthe für den ersten Fall gleich, aber im entgegengesetzten Sinne, also positiv; für diesen Fall ist also das Resultat bei Anwendung der Methode *a*) zu klein.

g) Vergleichen wir nun, wie sich in verschiedenen Fällen die Resultate bei Anwendung der empirischen Inhalts-Berechnungs-Methode *b*), bei welcher die Durchschnittshöhe mit dem Inhalt der Grundfläche multiplicirt wird, zu den Resultaten, welche Formel 16. gewährt, gestalten.

Nach der empirischen Methode *b*) ist

$I = \frac{a + b + c + d}{4}\left(\frac{g + k}{2}\right)e$; diesen Werth aufgelöst unter den aufgelösten Werth für I nach Formel 16. gesetzt, giebt:

$$\begin{array}{l} \frac{2age}{12} + \frac{2bge}{12} + \frac{cge}{12} + \frac{dge}{12} + \frac{ake}{12} + \frac{bke}{12} + \frac{2cke}{12} + \frac{2dke}{12} \\ \frac{age}{8} + \frac{bge}{8} + \frac{cge}{8} + \frac{dge}{8} + \frac{ake}{8} + \frac{bke}{8} + \frac{cke}{8} + \frac{dke}{8} \\ \hline \text{Differenz} = \frac{age}{24} + \frac{bge}{24} - \frac{cge}{24} - \frac{dge}{24} - \frac{ake}{24} - \frac{bke}{24} + \frac{cke}{24} + \frac{dke}{24} \end{array}$$

dafür $\left[(a + b)\,g - (c + d)\,g - (a + b)\,k + (c + d)\,k\right]\frac{e}{24}$;

dafür $\left[\left[(a + b) - (c + d)\right]\,g - \left[(a + b) - (c + d)\right]\,k\right]\frac{e}{24}$

dafür $\left[(a + b) - (c + d)\right]\left(g - k\right)\frac{e}{24}$.

Ist $a + b < c + d$, so ist

$(a + b) - (c + d) = - u$; diesen Werth eingesetzt, giebt

$-\left(g - k\right)\frac{ue}{24}$; da nun $g - k$ auch negativ ist, so ist der

ganze Ausdruck positiv, d. h. in diesem Falle ist das nach Methode *b*) gefundene Resultat um jenen Werth zu klein.

Ist $a + b = c + d$, so ist $u = 0$, und damit die Differenz auch $= 0$ (die Uebereinstimmung ist sub *e*) auch nachgewiesen).

Ist $a + b > c + d$, so ist

$(a + b) - (c + d) = + u$, und der Ausdruck für die Differenz =

$\left(g - k\right)\frac{ue}{24}$ negativ, weil $g - k$ wieder negativ ist; das nach Methode *b*) gefundene Resultat ist daher in diesem Falle um jenen Werth zu gross.

Durch Vergleichung der resp. Werthe für die Fehler bei den beiden empirischen Inhalts-Berechnungs-Methoden findet man, dass, wenn $a + b \lesseqgtr c + d$ ist, der Fehler, welcher bei Methode *b*) gemacht wird, halb so gross und im entgegengesetzten Sinne ist, wie der Fehler, welcher bei Anwendung der empirischen Methode *a*) gemacht wird.

h) In den folgenden Beispielen wollen wir die theoretischen Resultate dieses § zur praktischen Anschauung bringen.

In Formel 16. die Werthe eingesetzt, wie sie Fig. 15 für die verschiedenen Dimensionen des Körpers angenommen sind, giebt

$$I = \left[(32 + 8 + 24 + 8)\,10 + (16 + 4 + 48 + 16)\,22\right]\frac{50}{12}.$$

$$I = \left(72 \cdot 10 + 84 \cdot 22\right)\frac{50}{12} = 10700 \text{ Cubkm.}$$

Nach der empirischen Methode *a*) würde derselbe Körper-Inhalt berechnet werden, indem: das arithmetische Mittel aus dem Inhalt der parallelen Flächen mit dem senkrechten Abstande derselben von einander, multiplicirt wird, also

$$I = \left[\left(\frac{16 + 4}{2}\right)10 + \left(\frac{8 + 24}{2}\right)22\right]\tfrac{1}{2} \cdot 50 = 11300 \text{ Cubkm.},$$

der Fehler beträgt $11300 - 10700 = 600$ Cubkm.,

$$\text{oder } \frac{100 \cdot 600}{10700} = 5{,}6\,\tfrac{0}{0} \text{ zu viel,}$$

weil $a + b < c + d$.

Nach der empirischen Methode *b*) würde qu. Inhalt berechnet werden, indem die Grundfläche mit dem 4ten Theil der Summe der 4 Höhen multiplicirt wird, also

$$I = \frac{22 + 10}{2} \cdot 50 \cdot \frac{16 + 4 + 24 + 8}{4}$$

$$I = 10400 \text{ Cubkm.},$$

der Fehler beträgt $10700 - 10400 = 300$ Cubkm.,

$$\text{oder } \frac{100 \,.\, 300}{10700} = 2{,}8\,\% \text{ zu wenig.}$$

Der im Grundriss Fig. 18 dargestellte Körper hat dieselbe Grundfläche wie der Körper Fig. 15, die Summe der 4 Höhen ist bei den beiden Körpern auch gleich, die Oberfläche des Körpers Fig. 18 ist aber eine Ebene, weil, wie sub *d*) gefordert,

$$k : g = c - d : b - a$$

$$22 : 10 = 11 : 5.$$

Der Inhalt dieses Körpers kann nun auf 5 Arten berechnet werden:

1) Durch Zerlegung in 2 schiefabgeschnittene 3seitige Prismen:

$$I = \frac{15 + 3 + 8}{3} \cdot \frac{10 \cdot 50}{2} + \frac{15 + 8 + 26}{3} \cdot \frac{22 \cdot 50}{2}$$

$I = 11150$ Cubkm.

2) Durch andere Zerlegung in 2 schiefabgeschnittene 3seitige Prismen:

$$I = \frac{3 + 8 + 26}{3} \cdot \frac{10 \cdot 50}{2} + \frac{3 + 15 + 26}{3} \cdot \frac{22 \cdot 50}{2}$$

$I = 11150$ Cubkm.

3) Nach Formel 16.:

$$I = \left[(6 + 16 + 26 + 15)\,10 + (3 + 8 + 52 + 30)\,22\right] \frac{50}{12}$$

$I = 11150$ Cubkm.

4) Durch Mitteln der Profile etc.:

$$I = \left[\frac{(3 + 8)}{2}\,10 + \frac{(15 + 26)}{2}\,22\right] \frac{1}{2} \cdot 50$$

$I = 12650$ Cubkm.

Der Fehler beträgt $12650 - 11150 = 1500$ Cubkm.

$$\text{also } \frac{100 \cdot 1500}{11150} = 13{,}4\,\% \text{ zu viel,}$$

weil wieder $a + b < c + d$.

5) Durch Multipliciren der Grundfläche mit der Durchschnittshöhe:

$$I = \frac{22 + 10}{2}\,50 \cdot \frac{3 + 8 + 26 + 15}{4}$$

$I = 10400$ Cubkm. (wie bei dem vorigen Beispiel).

Der Fehler beträgt $11150 - 10400 = 750$ Cubkm.,

$$\text{also } \frac{100 \cdot 750}{11150} = 6{,}7\,\% \text{ zu wenig.}$$

Für den Fall, dass $a + b = c + d$ ist, und die Resultate bei Anwendung der beiden empirischen Methoden gleich werden dem Resul-

tate, wie es die mathematisch richtige Berechnung giebt, dient das folgende Beispiel, wofür Fig. 19.

Nach Formel 16. ist der Inhalt

$$I = \left[(6+16+5+6)\,10 + (3+8+10+12)\,22\right]\frac{50}{12} = 4400 \text{ Cubkm.}$$

Nach der empirischen Methode *a*) ist

$$I = \left[\frac{(3+8)}{2}\,10 + \frac{(6+5)}{2}\,22\right]\tfrac{1}{2}\cdot 50 = 4400 \text{ Cubkm.}$$

Nach der empirischen Methode *b*) ist

$$I = \frac{3+8+5+6}{4}\,\frac{(22+10)}{2}\,50 + 4400 \text{ Cubkm.}$$

Für den dritten Fall, dass $a+b>c+d$, gilt nachstehendes Beispiel, wie es Fig. 20 giebt. Bei demselben sind nur die Höhen von Fig. 18 gewechselt.

Nach Formel 16. ist

$$I = \left[(30+52+8+3)\,10 + (15+26+16+6)\,22\right]\frac{50}{12}$$

$$I = 9650 \text{ Cubkm.}$$

Nach Methode *a*) ist

$$I = \left[\frac{(15+26)}{2}\,10 + \frac{(3+8)}{2}\,22\right]\tfrac{1}{2}\cdot 50.$$

$I = 8150$ Cubkm.

der Fehler beträgt $9650 - 8150 = 1500$ Cubkm.,

$$\text{also } \frac{100\cdot 1500}{9650} = 15{,}6\,\% \text{ zu wenig.}$$

Nach Methode *b*) ist wie bei dem Beispiel für Fig. 18 sub 5)

$I = 10400$ Cubkm.

Fehler: $10400 - 9650 = 750$ Cubkm.,

$$\text{also } \frac{100\cdot 750}{9650} = 7{,}8\,\% \text{ zu viel.}$$

i) Es seien Fig. 15 die geraden Linien AC und BD, welche nach dem Obigen nicht in die windschiefe Oberfläche fallen, Kanten von je 2 dreiseitigen schiefabgeschnittenen Prismen, deren übrige Kanten die Kanten des Körpers Fig. 15 sind, dann ist das arithmetische Mittel der Inhalte der an AC und BD liegend gedachten, schief abgeschnittenen Prismenpaare gleich dem Inhalte des Körpers mit windschiefer Oberfläche, d. h. es ist

$$I = \left[\left(\frac{a+b+d}{3}\right)\cdot\frac{ge}{2} + \left(\frac{b+c+d}{3}\right)\frac{ke}{2} + \left(\frac{a+b+c}{3}\right)\frac{ge}{2} + \left(\frac{a+c+d}{3}\right)\frac{ke}{2}\right]\tfrac{1}{2};$$

denn dieser Werth zusammengezogen, ist mit dem Werthe für I in Formel 16. identisch. Es ist

$$I = \left[(a + b + d + a + b + c)\, g + (b + c + d + a + c + d)\, k\right] \frac{e}{12}$$

dafür

$I = \left[(2a + 2b + c + d)\, g + (a + b + 2c + 2d)\, k\right] \frac{e}{12}$ wie in Formel 16.

§ 22.

Ein Körper, dessen normaler Querschnitt ein radial abgegrenzter Theil einer Ringfläche, und dessen Oberfläche eine windschiefe Fläche ist.

a) Ist Fig. 21 F ein radial begrenzter Theil einer Ringfläche, so kann man sich diese Fläche aus n gleichen Parallel-Trapezen zusammengesetzt denken, deren jedes zu parallelen Seiten $\frac{k}{n}$ und $\frac{g}{n}$, e zur Höhe hat, und dessen Flächen-Inhalt daher =

$$\left(\frac{g}{n} + \frac{k}{n}\right) \frac{e}{2} = \left(\frac{g + k}{2n}\right) e \text{ ist;}$$

dann sind n solcher Trapeze,

$$\text{das ist } F = \frac{n\,(g + k)\, e}{2n} = \frac{(g + k)\, e}{2}.$$

b) Die Fläche F Fig. 21 sei nun die Grundfläche eines Körpers mit windschiefer Oberfläche; Vorder- und Hinterfläche dieses Körpers sind Theile von Cylinderflächen und sind zu einander parallel, die beiden Seitenflächen sind Ebenen, die radial stehen.

Es lassen sich in der windschiefen Oberfläche parallel zu den Cylinderflächen einfach gekrümmte Bogenlinien denken; es können ferner in der windschiefen Oberfläche unendlich viele radiale gerade Linien gedacht werden; dieselben dürfen verlängert einander nicht schneiden, weil sonst die Oberfläche eine Ebene sein würde.

Jeder Punkt in der windschiefen Oberfläche ist als Schnittpunkt von einer Linie des einen dieser Linien-Systeme mit der entsprechenden Linie des andern Systems anzusehen.

Z. B. Fig. 21 sei k = 40,0 M., MC = 420,0 M., e = 20,0 M., dann verhält sich

$$420 : 400 = 40 : g$$

$$g = \frac{40 \cdot 400}{420} = 38{,}09 \text{ M.}$$

Die Höhe der Seitenkanten a, b, c, d sei = resp. 16, 4, 24, 8 M.

Soll Q der Schnittpunkt der Bogenlinie RO mit der radialen Linie MN sein, so müssen an der Stelle die beiden Linien dieselbe Höhe über der Grundfläche haben.

NC sei = 2,4 M., QN = 6,8 M.;

dann ist MQ = 420,0 — 6,8= 413,2 M.

Die Länge der Bogenlinie RO wird gefunden

$$420{,}0 : 413{,}2 = 40 : RO.$$

$$RO = \frac{413{,}2 \cdot 40}{420{,}0} = 39{,}35 \text{ M.}$$

Die Höhe für den Punkt R ist =

$$8 + \frac{(16 - 8)}{20} \cdot 6{,}8 = 10{,}72 \text{ M.}$$

Die Höhe für den Punkt O ist =

$$24 - \frac{(24 - 4)}{20} 6{,}8 = 17{,}20 \text{ M.}$$

$$420 : 413{,}2 = 2{,}4 : QO.$$

$$QO = \frac{413{,}2 \cdot 2{,}4}{420} = 2{,}36 \text{ M.}$$

Die Höhe des Punktes Q über der Grundfläche ist dann gleich

$$17{,}20 - \frac{(17{,}20 - 10{,}72)}{39{,}35} 2{,}36 = 16{,}811 \text{ M.}$$

Bedienen wir uns nun zu der Berechnung dieser Höhe der radialen geraden Linie LN.

Es ist die Höhe für den Punkt N =

$$24{,}0 - \frac{24 - 8}{40} \cdot 2{,}4 = 23{,}04 \text{ M.}$$

$$420 : 400 = 2{,}4 : LB$$

$$LB = \frac{400 \cdot 2{,}4}{420} = 2{,}2857 \text{ M.}$$

Die Höhe für den Punkt L ist =

$$4 + \frac{(16 - 4)}{38{,}09} 2{,}2857 = 4{,}72 \text{ M.}$$

Die Höhe für den Punkt Q ist nun =

$$23{,}04 - \frac{(23{,}04 - 4{,}72)}{20} 6{,}8 = 16{,}811 \text{ M. wie oben.}$$

Dass in der windschiefen Oberfläche Fig. 21 nur in der radialen Richtung gerade Linien denkbar sind, ist, wie bei dem analogen Gegenstande bei Fig. 15, zu beweisen.

c) Die Oberfläche F Fig. 21 ist eine Ebene, wenn die Verlängerung der Kanten DA und CB sich in einem Punkte M schneiden.

Beweis. Findet dieses Schneiden statt, so ist durch qu. Linien eine Ebene bestimmt, und es fallen sämmtliche in der Oberfläche des Körpers parallel zu Vorder- und Hinterfläche gedachte einfach gekrümmte Linien in diese Ebene, weil sie 2 Punkte mit derselben gemein haben, d. h. die Oberfläche des Körpers ist dann keine windschiefe Fläche, sondern eine Ebene.

d) Um eine Formel für den Inhalt des Körpers Fig. 21 abzuleiten, denken wir uns wieder diesen Körper durch $n - 1$ mit der Vorder- und der Hinterfläche parallele Ebenen in n scheibenartige Theile zerlegt. Wenn WP wieder die Mitte der Kante AB mit der Mitte der Kante DC verbindet, und $r = \frac{a+b}{2}$, $s = \frac{c+d}{2}$, $s > r$ ist,

so ist der körperliche Inhalt wie bei Fig. 15 gleich der Summe der Inhalte der scheibenförmigen Theilkörper, deren Dicke $= t$ sei,

$$I = t\left[gr + \left(g + \frac{k-g}{n}\right)\left(r + \frac{s-r}{n}\right) + \left(g + 2\cdot\frac{k-g}{n}\right)\left(r + 2\cdot\frac{s-r}{n}\right) + \cdots\cdot k\cdot s\right]$$

oder wenn $s < r$

$$I = t\left[gr + \left(g + \frac{k-g}{n}\right)\left(r - \frac{r-s}{n}\right) + \left(g + 2\cdot\frac{k-g}{n}\right)\left(r - 2\cdot\frac{r-s}{n} + \cdots\cdot k\cdot s\right]\cdot\right.$$

In § 21. ist an Fig. 16 und Fig. 17 nachgewiesen, dass in beiden Fällen der körperliche Inhalt dann ist:

Formel 18. (wie 16.)

$$I = \left[(2a + 2b + c + d)\, g + (a + b + 2c + 2d)\, k\right]\frac{e}{12}\cdot$$

§ 23.

Ein Körper, dessen 4 Seitenflächen, von denen 2 Theile von Cylinderflächen und 2 Ebenen sind, paarweise parallel zu einander sind, und dessen Oberfläche eine windschiefe Fläche ist.

Bei Canal- und Wegekörpern kommt dieser Fig. 22 im Grundriss dargestellte Körper vor.

Von der Kante AD nach der Kante BC lassen sich in der windschiefen Oberfläche bogenförmige Linien parallel zu der Vorder- und Hinterfläche des Körpers denken; ferner können von der Kante AB nach der Kante DC in der windschiefen Oberfläche gerade Linien parallel zu den Seitenflächen des Körpers gedacht werden.

Werden durch die bogenförmigen Linien Flächen gedacht, parallel zur Vorder- und Hinterfläche des Körpers, oder durch die geraden Linien Ebenen parallel zu den Seitenflächen, so wird der Körper in beiden Fällen in n Theile zerlegt, und es sind, wenn die Vorderfläche F, die Hinterfläche F_1 ist, auf dieselbe Weise wie bei dem Körper Fig. 12 für den Inhalt die Formeln

Formel 19. (wie 11.) $I = \left(F + F_1\right)\frac{e}{2}$

„ 20. (wie 12.) $I = \left(\frac{F + F_1}{2}\right) e$

„ 21. (wie 13.) $I = \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right) eg$

zu entwickeln.

Die Oberfläche des Körpers Fig. 22 ist wie bei dem Körper Fig. 12 eine windschiefe Fläche, wenn $a + c \gtrless b + d$, und eine Ebene, wenn $a + c = b + d$ ist.

§ 24.

Rationelle Inhalts-Berechnung des Eisenbahn-Körpers. Zerlegung des Bahnkörper-Abschnittes in einen Mittelkörper und zwei seitliche Pyramiden. Einfluss der Windschiefe der resp. Terrainflächen-Abschnitte auf die Inhalts-Berechnung der seitlichen Pyramiden.

Gehen wir nun auf die Feststellung der Erdmassen beim Eisenbahn-Körper unter der Voraussetzung, dass das Quergefälle berücksichtigt werden muss, näher ein.

a) Es seien Fig. 23a und b die beiden zusammengehörigen Querprofile, die einen Bahnkörper-Abschnitt von der Länge l abgrenzen. In Fig. 23c ist dieser Abschnitt im Grundriss mit den nivellirten Punkten der Terrainfläche, dargestellt.

Ist $ABCD$ Fig. 23c ein Rechteck, so lässt sich, Falls es möglich wäre, dass von den Kanten ab, bc, cd, de, ef und fg nach den Kanten hi, ik und kl gerade Linien in den windschiefen Grundflächen parallel zu den Seitenflächen ADD_1 und BCC_1 gedacht werden können, der Inhalt des durch die Profilebenen und durch die Seitenflächen ADD_1 und BCC_1 abgegrenzten Körpers, nach Formel 12. richtig ermitteln.

Beweis. Es werden in gleichen Abständen von einander parallel zu den Seitenflächen ADD_1 und BCC_1 n Schnittebenen gedacht; dadurch wird der Körper in $n + 1$ prismatische Körper zerlegt (dabei ist vorausgesetzt, dass $n =$ nahezu unendlich ist). Die Grundflächen dieser Prismen sind Trapeze; die im Profil Fig. 23b liegenden Seiten dieser Trapeze wollen wir h, h_1, h_2, $\ldots h_n$ nennen, die correspondirenden Seiten im Profil Fig. 23a H, H_1, H_2, $\ldots H_n$, der nahezu unendlich kleine Abstand der Schnittebenen von einander (die Höhe der prismatischen Körper) sei $= s$. Dann ist der Inhalt des Körpers ADD_1C_1CB

$$I = \frac{(h+H)}{2} es + \frac{(h_1+H_1)}{2} es + \frac{(h_2+H_2)}{2} es + \ldots\ldots \frac{(h_n+H_n)}{2} es$$

oder

$$I = \left[(h + h_1 + h_2 + \ldots\ldots h_n)\, s + (H + H_1 + H_2 + \ldots\ldots H_n)\, s\right] \frac{e}{2}.$$

Nun ist aber $(h + h_1 + h_2 + \cdot\cdot h_n)\, s =$ der Profilfläche Fig. 23b, $(H + H_1 + H_2 + \ldots\ldots H_n)\, s =$ dem Theil DD_1C_1C der Profilfläche Fig. 23a, und nennen wir die erstere Fläche F, die zweite F_1, so ist

$$I = \frac{(F + F_1)}{2} e.$$

Von den Kanten ab, bc, cd, de, ef und fg nach den Kanten hi, ik und kl können in den windschiefen Grundflächen parallel zu den Ebenen ADD_1 und BCC_1 und der durch die Achse des Bahnkörpers gedachten Vertikalebene aber nur dann gerade Linien gedacht werden, wenn die Horizontalprojectionen jener theilweise windschiefen Grundflächen Rechtecke sind, von denen je 2 Seiten parallel zur Achse des Bahnkörpers liegen (siehe § 20 a, b und d), und dieses kann nur in dem Falle stattfinden, wenn bei der Aufnahme der Profile Fig. 23a und b die Profilpunkte in Profil Fig. 23b in denselben Abständen von der Mittellinie gewählt sind, wie die correspondirenden Profilpunkte in Profil Fig. 23a.

Wie in Fig. 23 dargestellt, darf die Aufnahme der Profile daher nicht stattfinden, sondern wie in Fig. 24.

Die oben beschriebene Berechnungsweise von dem Inhalte des Mittelkörpers gilt darnach für Fig. 24.

Die Entfernung der Profilpunkte von einander in derselben Querprofilebene, sowie die Entfernung der beiden Profilebenen von einander, muss der Configuration des Terrains derart angemessen angenommen werden, dass einerseits die geraden Verbindungslinien (Fig. 24) ab, bc, cd, de, andererseits die geraden Verbindungslinien aa_1, bb_1, cc_1, dd_1, ee_1 annähernd mit der Terrainfläche zusammenfallen.

Werden bei der Aufnahme der Profile die correspondirenden Punkte in beiden Profilen so aufgenommen, dass ihre Verbindungslinien nicht parallel zur Bahnachse sind, so lässt sich nur auf sehr mühsame Weise die Inhalts-Berechnung des betreffenden Bahnkörpers mathematisch richtig ausführen. Wir werden später auf diesen Gegenstand zurückkommen.

b) Zur Inhalts-Berechnung des ganzen Bahnkörper-Abschnittes Fig. 24 gehört nun noch die Berechnung des Inhaltes der beiden Pyramiden $AEDD_1$ und $BGCC_1$.

Die Schnittlinien AE und BG (Fig. 24c) der Böschungsebenen mit den windschiefen Flächen abb_1a_1 resp. dee_1d_1 sind eigentlich keine geraden Linien, sondern Curven; sie weichen von der Geraden mehr und mehr ab, einerseits, je mehr die Flächen abb_1a_1 und dee_1d_1 windschief sind, andererseits je weniger die Schnittlinien zu der vertikalen Achs-Ebene parallel sind. Es ist selbstverständlich, dass die Berücksichtigung dieser Momente die Inhalts-Berechnung jener Pyramiden erschwert, und muss es daher von Interesse sein, Kenntniss davon zu nehmen, inwieweit jene Momente hierbei influiren können.

Wählen wir dazu ein Beispiel, bei welchem beide Momente in sehr ungünstiger Weise erscheinen.

Fig. 25a ist Vertikal-, Fig. 25b Horizontalprojection, ab, bb_1, b_1a_1,

a_1a sollen wieder gerade Linien und abb_1a_1 eine windschiefe Fläche sein, HI Fig. 25a soll die Vergleichungsebene für die darunter liegende windschiefe Fläche sein; zwischen den beiden aufgenommenen Querprofilen sind 10 mit diesen Profilebenen parallele Schnittebenen gedacht und im Grundriss die resp. Schnittlinien angegeben, die eingeklammerten Zahlen sind Höhenmaasse, die an der Linie AD im Grundrisse notirten Höhenzahlen sind die Vertikalabstände der Linien AD und AD_1 von einander in den einzelnen Schnittebenen, die andern Höhenmaasse links und rechts sind die Vertikalabstände der windschiefen Terrainfläche von der Vergleichungsebene in den einzelnen Schnittebenen; die in der Figur eingeschriebenen Verhältnisszahlen geben das Neigungsverhältniss der Terrainfläche in den Schnittebenen an; wo die Neigung des Terrains auf die Grundbreite der Böschungsfläche negativ influirt, ist das Minus-Zeichen beigefügt. Die Curve im Grundriss ist der Auslauf der Böschungsfläche auf dem Terrain.

Es ist nun der Inhalt des durch diese Curve und durch die geraden Kanten AD, AD_1, DD_1, DE und D_1E begrenzten Körpers aus den im Grundriss ersichtlichen 11 Theilen desselben zu berechnen.

Nach Formel 17 ist der Inhalt von:

$$\text{I.} = \left[(2 \cdot 6{,}75 + 7{,}5)\ 13{,}73 + (6{,}75 + 2 \cdot 7{,}5)\ 18\right]\frac{4{,}0}{12} = 226{,}61 \text{ Cubkm.}$$

$$\text{II.} = \left[(2 \cdot 6{,}00 + 6{,}75)\ 10{,}59 + (6{,}00 + 2 \cdot 6{,}75)\ 13{,}73\right]\frac{4{,}0}{12} = 155{,}43 \text{ „}$$

$$\text{III.} = \left[(2 \cdot 5{,}25 + 6{,}00)\ 8{,}18 + (5{,}25 + 2 \cdot 6{,}00)\ 10{,}59\right]\frac{4{,}0}{12} = 105{,}88 \text{ „}$$

$$\text{IV.} = \left[(2 \cdot 5{,}00 + 5{,}25)\ 7{,}50 + (5{,}00 + 2 \cdot 5{,}25)\ 8{,}18\right]\frac{1{,}33}{12} = 26{,}73 \text{ „}$$

$$\text{V.} = \left[(2 \cdot 4{,}50 + 5{,}00)\ 6{,}28 + (4{,}50 + 2 \cdot 5{,}00)\ 7{,}50\right]\frac{2{,}67}{12} = 43{,}76 \text{ „}$$

$$\text{VI.} = \left[(2 \cdot 3{,}75 + 4{,}50)\ 4{,}74 + (3{,}75 + 2 \cdot 4{,}50)\ 6{,}28\right]\frac{4{,}0}{12} = 45{,}65 \text{ „}$$

$$\text{VII.} = \left[(2 \cdot 3{,}00 + 3{,}75)\ 3{,}46 + (3{,}00 + 2 \cdot 3{,}75)\ 4{,}74\right]\frac{4{,}0}{12} = 27{,}83 \text{ „}$$

$$\text{VIII.} = \left[(2 \cdot 2{,}25 + 3{,}00)\ 2{,}39 + (2{,}25 + 2 \cdot 3{,}00)\ 3{,}46\right]\frac{4{,}0}{12} = 15{,}49 \text{ „}$$

$$\text{IX.} = \left[(2 \cdot 1{,}50 + 2{,}25)\ 1{,}48 + (1{,}50 + 2 \cdot 2{,}25)\ 2{,}39\right]\frac{4{,}0}{12} = 7{,}37 \text{ „}$$

$$\text{X.} = \left[(2 \cdot 0{,}75 + 1{,}50)\ 0{,}69 + (0{,}75 + 2 \cdot 1{,}50)\ 1{,}48\right]\frac{4{,}0}{12} = 2{,}54 \text{ „}$$

$$\text{XI.} = \left[(2 \cdot 0 + 0{,}75)\ 0 + (0 + 2 \cdot 0{,}75)\ 0{,}69\right]\frac{4{,}0}{12} =$$

$$2 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}69 \cdot \frac{4{,}0}{12} = \frac{0{,}75 \cdot 0{,}69}{2} \cdot \frac{4{,}0}{3} = 0{,}35 \text{ „}$$

Sa. 657,64 Cubkm.
= rtd. 658 Cubkm.

Wird die empirische Methode angewandt, nach welcher Behufs Ermittelung des Inhaltes des Erdkörpers in Fig. 23, das arithmetische Mittel aus den Flächeninhalten der ganzen Profilflächen mit dem senkrechten Abstande derselben von einander, multiplicirt wird, so sind die Pyramiden $AEDD_1$ und $BHCC_1$ dabei miteinbegriffen, und dies Verfahren auf den hier vorliegenden Fall angewandt, würde den stereometrischen Gesetzen nicht entsprechend, für den Inhalt des Körpers in Fig. 25 ergeben:

$$I = \left(\frac{18 \cdot 7{,}5}{2} + 0\right) \tfrac{1}{2} \cdot 40{,}00 = 1350 \text{ Cubkm.}$$

Der Fehler beträgt $1350 - 658 = +\,692$ Cubkm.

$$\text{oder } \frac{692 \cdot 100}{658} = +\,105{,}2\,\%.$$

Wird nur unberücksichtigt gelassen, dass die Grundfläche des Körpers keine Ebene, sondern eine windschiefe Fläche ist, sonst aber der Pyramiden-Form Rechnung getragen, so ist

$$I = \frac{18{,}0 \cdot 7{,}5}{2} \cdot \frac{40{,}0}{3} = 900 \text{ Cubkm.}$$

Der Fehler beträgt $900 - 658 = 242$ Cubkm.,

$$\text{oder } \frac{242 \cdot 100}{658} = 36{,}8\,\%.$$

Die Windschiefe der Terrainfläche influirt in diesem Falle so sehr, dass, wenn man zur richtigen Inhalts-Berechnung nicht die Methode der Zerlegung des Körpers anwenden will, bei der Profilaufnahme noch ein, event. mehrere Zwischenprofile angenommen sein müssen.

Nehmen wir an, dass in der Mitte bei a_2b_2 Fig. 25b noch ein Profil aufgenommen ist, und die windschiefe Fläche abb_2a_2 Fig. 26b dieselbe Fläche ist wie die in Fig. 25b ebenso bexeichnete Fläche. Dann ist der Inhalt des Körpers $PELL_1$ zu berechnen; der Inhalt von

$$\text{I.} = \left[(2 \cdot 4{,}42 + 5{,}53)\ 8{,}99 + (4{,}42 + 2 \cdot 5{,}53)\ 13{,}27\right] \frac{4{,}0}{12} = 111{,}54 \text{ Cubkm.}$$

$$\text{II.} = \left[(2 \cdot 3{,}32 + 4{,}42)\ 5{,}86 + (3{,}32 + 2 \cdot 4{,}42)\ \ 8{,}99\right] \frac{4{,}0}{12} = \ \ 58{,}04 \quad \text{„}$$

$$\text{III.} = \left[(2 \cdot 2{,}21 + 3{,}32)\ 3{,}44 + (2{,}21 + 2 \cdot 3{,}32)\ \ 5{,}86\right] \frac{4{,}0}{12} = \ \ 26{,}16 \quad \text{„}$$

$$\text{IV.} = \left[(2 \cdot 1{,}84 + 2{,}21)\ 2{,}76 + (1{,}84 + 2 \cdot 2{,}21)\ \ 3{,}44\right] \frac{1{,}33}{12} = \ \ 4{,}19 \quad \text{„}$$

$$\text{V.} = \left[(2 \cdot 1{,}11 + 1{,}84)\ 1{,}55 + (1{,}11 + 2 \cdot 1{,}84)\ \ 2{,}76\right] \frac{2{,}67}{12} = \ \ 4{,}34 \quad \text{„}$$

$$\text{VI.} = \frac{1{,}55 \cdot 1{,}11}{2} \cdot \frac{4{,}0}{3} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 1{,}15 \quad \text{„}$$

Sa. 205,42 Cubkm.

Nach der Methode des Mittelns der Profile ist

$$I = \left(\frac{13{,}27 \cdot 5{,}53}{2} + 0\right) \frac{1}{2} \cdot 20{,}0 = 366{,}92 \text{ Cubkm.}$$

Der Fehler ist $= 366{,}92 - 205{,}42 = + 161{,}5$ Cubkm.

$$\text{oder} = \frac{161{,}5 \cdot 100}{205{,}42} = + 78{,}6\,\%.$$

Wird der Körper als Pyramide berechnet, so ist

$$I = \frac{13{,}27 \cdot 5{,}53}{2} \cdot \frac{20{,}0}{3} = 244{,}61 \text{ Cubkm.}$$

Der Fehler ist $= 244{,}61 - 205{,}42 = + 39{,}19$ Cubkm.

$$\text{oder} = \frac{39{,}19 \cdot 100}{205{,}42} = + 19{,}1\,\%.$$

Die Windschiefe der Terrainfläche influirt auch jetzt noch so sehr, dass der qu. Körper einfach als Pyramide nicht berechnet werden kann, sondern um den Inhalt annähernd, aber ohne zu grosse Umständlichkeit zu berechnen, ist ein Profil QR in dem Abstande 0,4 aa_2 von der Grundfläche, also 0,6 aa_2 von der Spitze des pyramidenförmigen Körpers ab gerechnet, durch Rechnung zu ermitteln, und die Inhalte der beiden Theile des Körpers darnach zu berechnen. Im vorliegenden Falle ist der erste Theil $=$

$$\left[(2 \cdot 3{,}32 + 5{,}53)\, 5{,}86 + (3{,}32 + 2 \cdot 5{,}53)\, 13{,}27\right] \frac{8{,}0}{12} = 174{,}76$$

der zweite Theil, die Pyramide $= \frac{5{,}86 \cdot 3{,}32}{2} \cdot \frac{12{,}0}{3} = 38{,}91$

Sa. 213,67 Cbkm.

Der Fehler ist $= 213{,}67 - 205{,}42 = + 8{,}25$ Cubkm.

$$\text{oder} = \frac{8{,}25 \cdot 100}{205{,}42} = + 4{,}0\,\%.$$

Die Windschiefe der Terrainfläche influirte bei den beiden Beispielen, für welche die Figuren 25 und 26 gelten, auf den Inhalt des pyramidenförmigen Körpers in negativer Weise, weil vom Fusse der Pyramide ab nach der Spitze zu, das Fallen in der Quere (das Moment, welches die Grundbreite der Böschungsfläche vergrössert) abnimmt bis 0 wird, und dann ein Steigen eintritt.

In den Fig. 27a und b ist ein Beispiel für den Fall gegeben, dass die Windschiefe der Terrainfläche in positiver Weise auf den Inhalt des pyramidenförmigen Körpers influirt, weil vom Fusse desselben nach der Spitze hin das Gegensteigen zur Böschungsfläche in der Quere (das Moment, welches die Grundbreite der Böschungsfläche verringert) abnimmt und durch 0 in Fallen übergeht.

Berechnen wir nun wieder den Inhalt des Körpers nach den verschiedenen Methoden. Es ist:

$$\text{I.} = \left[(2 \cdot 4{,}42 + 5{,}53)\, 5{,}25 + (4{,}42 + 2 \cdot 5{,}53)\, 6{,}03\right] \frac{4{,}0}{12} = 56{,}26 \text{ Cubkm.}$$

$$\text{II.} = \left[(2 \cdot 3{,}32 + 4{,}42)\, 4{,}33 + (3{,}32 + 2 \cdot 4{,}42)\, 5{,}25\right] \frac{4{,}0}{12} = 37{,}24 \text{ „}$$

$$\text{III.} = \left[(2 \cdot 2{,}21 + 3{,}32)\, 3{,}20 + (2{,}21 + 2 \cdot 3{,}32)\, 4{,}33\right] \frac{4{,}0}{12} = 21{,}03 \text{ „}$$

$$\text{IV.} = \left[(2 \cdot 1{,}84 + 2{,}21)\, 2{,}76 + (1{,}84 + 2 \cdot 2{,}21)\, 3{,}20\right] \frac{1{,}33}{12} = 4{,}02 \text{ „}$$

$$\text{V.} = \left[(2 \cdot 1{,}11 + 1{,}84)\, 1{,}80 + (1{,}11 + 2 \cdot 1{,}84)\, 2{,}76\right] \frac{2{,}67}{12} = 4{,}57 \text{ „}$$

$$\text{VI.} = \frac{1{,}80 \cdot 1{,}11}{2} \cdot \frac{4{,}0}{3} = \ldots\ldots\ldots\ldots \; 1{,}33 \text{ „}$$

Sa. 124,45 Cubkm.

Wird der Körper durch Mitteln der Profile berechnet, so ist

$$I = \left(\frac{6{,}03 \cdot 5{,}53}{2} + 0\right) \tfrac{1}{2} \cdot 20{,}0 = 166{,}73 \text{ Cubkm.}$$

Der Fehler beträgt 166,73 — 124,45 = + 42,28 Cubkm.

$$\text{oder } \frac{42{,}28 \cdot 100}{124{,}45} = + 34{,}0\%.$$

Wird der Körper als Pyramide berechnet, so ist

$$I = \frac{6{,}03 \cdot 5{,}53}{2} \cdot \frac{20{,}0}{3} = 111{,}15 \text{ Cubkm.}$$

Der Fehler beträgt 124,45 — 111,15 = — 13,30 Cubkm.

$$\text{oder } \frac{13{,}30 \cdot 100}{124{,}45} = - 10{,}7\%.$$

Mit Benutzung des berechneten Profils QR ($Qa = 0{,}4$ von aa_2, $Qa_2 = 0{,}6$ von aa_2) den Körper in 2 Theilen berechnet, giebt:

$$\left[(2 \cdot 3{,}32 + 5{,}53)\, 4{,}33 + (3{,}32 + 2 \cdot 5{,}53)\, 6{,}03\right] \frac{8{,}0}{12} = 92{,}94 \text{ Cubkm.}$$

$$\frac{4{,}33 \cdot 3{,}32}{2} \cdot \frac{12{,}0}{3} = \ldots\ldots\ldots\ldots \; 28{,}75 \text{ „}$$

Sa. 121,69 Cubkm.

Der Fehler beträgt 124,45 — 121,69 = — 2,76 Cubkm.

$$\text{oder } - \frac{2{,}76 \cdot 100}{124{,}45} = - 2{,}2\%.$$

Bei den Beispielen mit den Figuren 25, 26 und 27 ist die Kante, analog AD des pyramidenförmigen Körpers AED_1D Fig. 24 nicht horizontal, oder mit einem sehr kleinen Neigungswinkel gegen die Horizontale, dem Planum des Eisenbahn-Erdkörpers entsprechend, sondern theilweise mit sehr starkem Neigungswinkel angenommen.

Denken wir uns nun in Fig. 26a die Profillinie a_2b_2, in welcher die Spitze P des pyramidenförmigen Körpers liegt, bis L parallel herauf-

geschoben, alle übrigen Momente dieses Beispiels unverändert, so bekommen wir die Figuren 28a und 28b mit den eingeschriebenen Maassen, zur Darstellung. Die der Kante AD in Fig. 24 entsprechende Kante PL ist nun eine Horizontallinie und erscheint daher projecirt auf die Vertikalebene, zu welcher sie senkrecht steht, in Fig. 28a als Punkt. Wie aus Fig. 28b ersichtlich, werden die Neigungsverhältnisse der Schnittlinien, welche die mit den Profilebenen parallel gedachten Schnittebenen mit der Terrainfläche bilden, dieselben wie bei Fig. 26b, und der pyramidenförmige Körper gestaltet sich in beiden Fällen gleich.

Aus dem Vorhergehenden können wir den Schluss ziehen, dass in dem Falle, wenn der eine oder beide seitliche pyramidenförmige Körper auf je einem Terrainflächen-Abschnitte ruhen, diese Körper nur dann als Pyramiden berechnet werden können, wenn die Windschiefe der resp. Terrainflächen-Abschnitte nicht erheblich ist; damit also diese einfache Berechnungsart stattfinden kann, sind die Querprofile so nahe aneinander aufzunehmen, dass dadurch die zu grosse Windschiefe der Terrainflächen-Abschnitte vermieden wird, besonders dann, wenn dem Längenprofil nach grosse seitliche Pyramiden vorauszusetzen sind.

Beschäftigen wir uns nun mit dem in Fig. 29 zur Darstellung gebrachten Fall, dass der pyramidenförmige Böschungskörper zwischen 2 Profilen mehrere windschiefe Abschnitte der Terrainfläche deckt.

Es sei das Planum in der Richtung $d_1 d$ ansteigend, HI sei die Schnittlinie der Profilebene II. mit der erweiterten Planumssebene, ST die Schnittlinie der Profilebene I. mit der erweiterten Planumsebene (siehe die Vertikalprojection Fig. 29a). Die senkrechten Abstände der nivellirten Terrainpunkte von jenen Schnittlinien HI und ST sind in dem Grundriss Fig. 29b eingeklammert angegeben. Der Körper, welcher construirt und berechnet werden soll, hat in P seine Spitze und ist von den Kanten PL (parallel mit der Planumsebene) PL_1, L_1L, LE, Eb, bc, cL_1, EW, WU, UP begrenzt. Es handelt sich zunächst darum, die Punkte U und W zu bestimmen, in welchen der Auslauf der Böschung die Linien cc_1 resp. bb_1 schneidet. Der bessern Veranschaulichung wegen denken wir uns in Fig. 29c die durch c_1c gehende Vertikalebene als Projectionsebene, und projeciren auf dieselbe die Punkte P, L und L_1; dann ist UY (Fig. 29c) $= \frac{2}{3}$ von UV (Fig. 29b) $= \frac{2}{3} \cdot 4{,}0 = 2{,}66$.

$$\text{(Fig. 29c)}\quad UZ = \frac{7{,}09}{20{,}0}\, x, \text{ daher}$$

$$5{,}29 + \frac{7{,}09}{20{,}0}\, x = 5{,}50 + 2{,}66$$

$$x = 8{,}10 = c_1 U.$$

Dadurch ist der Punkt U Fig. 29b bestimmt. Ganz analog wird dnr Punkt W bestimmt. Die diesem Falle entsprechende Distanz UY ist $= \frac{2}{3}\ WX = \frac{2}{3} \cdot 10{,}0 = 6{,}66$.

$$9{,}59 + \frac{5{,}41}{20{,}0}\ x = 5{,}50 + 6{,}66$$
$$x = 9{,}50 = b_1\ W.$$

Die Linien EW, WU und UP sind zwar Curven, weichen aber, da es nur kurze Distanzen sind, und die Windschiefe der Terrainflächen-Abschnitte nicht bedeutend ist, von der geraden Linie so wenig ab, dass man dieselben, ohne einen erheblichen Fehler bei der Inhalts-Berechnung zu machen, als gerade Linien ansehen kann. Die Inhalts-Berechnung ist dann:

$\frac{3{,}02 \cdot 2{,}84}{2} \cdot \frac{10{,}5}{3} =$ . . . . . 15,01 Cubkm.

$\left[(2 \cdot 2{,}84 + 4{,}22)\ 10{,}5 + (2{,}84 + 2 \cdot 4{,}22)\ 11{,}9\right] \frac{6{,}0}{12} = 119{,}09$ „

$\left[(2 \cdot 4{,}22 + 7{,}62)\ 11{,}9 + (4{,}22 + 2 \cdot 7{,}62)\ 20{,}0\right] \frac{4{,}0}{12} = 193{,}44$ „

Sa. 327,54 Cubkm.

Wird der Körper durch Mitteln der Profile berechnet, so ist

$$\left[\frac{3{,}02 \cdot 2{,}84}{2} + \frac{(2{,}84 + 4{,}22)}{2}\ 6{,}0 + \frac{(4{,}22 + 7{,}62)}{2}\ 4{,}0\right] \tfrac{1}{2} \cdot 20{,}0 = 491{,}48 \text{ Cubkm.}$$

Der Fehler beträgt $491{,}48 - 327{,}54 = 163{,}94$ Cubkm.

$$\text{oder } \frac{163{,}94 \cdot 100}{327{,}54} = +\ 50{,}1\,\%.$$

Bemerkung. Der zuletzt beschriebene Fall zeigt, dass auch durch nahes Aneinanderlegen der Querprofilpunkte der nachtheilige Einfluss, welchen die Windschiefe der Terrainflächen-Abschnitte auf die Inhalts-Berechnung der seitlichen pyramidenförmigen Körper hat, beschränkt werden kann. Das Construiren des Auslaufes der Böschungen wird aber umständlich und zeitraubend, wenn von der Auslauflinie mehrere Verbindungslinien der correspondirenden Querprofilpunkte geschnitten werden, die nachfolgende Inhalts-Berechnung wird dadurch auch complicirt, und es empfiehlt sich daher auch in diesem Falle, denselben Zweck durch nahes Aneinanderlegen der Querprofilebenen anzustreben. Die seitlichen pyramidenförmigen Körper werden dann nicht so gross, dass jener Uebelstand eintritt, und es kommt der Mittelkörper, also der Theil, für den der Inhalt leicht zu berechnen ist, mehr zur Geltung.

§ 25.

Der Bahnkörper-Abschnitt wird durch Profile abgegrenzt, von denen das eine nur Auftrag, das andere Abtrag und Auftrag enthält. Hierzu Fig. 30.

Bei der Aufnahme der Profile werden die Terrainpunkte in ihrer Höhenlage zu den Horizontalebenen AB und CD bestimmt, welche durch die Punkte F und E des Längen-Nivellements in der Mittellinie, angenommen werden. Diese Höhenmaasse sind mit dem Vorzeichen + oder — (je nachdem die Punkte über oder unter jenen Horizontalebenen liegen), in dem Grundriss schwarz geschrieben. Die zur Inhalts-Berechnung der Auftrags- und Abtrags-Körper dienenden Höhen und Tiefen der Terrainpunkte zur Planumsebene etc., werden in den Grundriss ebenfalls mit den Vorzeichen + resp. — (Auftrag resp. Abtrag) in Roth eingeschrieben (hier sind sie schwarz geschrieben und eingeklammert). Die Längenmaasse der Aufnahme sind schwarz, die Längenmaasse des Projects sind roth einzuschreiben. Der Auftrag wird roth colorirt, der Abtrag grau, die oberen Böschungsränder werden durch einen Schattenton markirt, die Gräben werden mit einem dunklern Abtrags-Farbenton angelegt. Wo die Tiefe des Grabens variabel ist, also bei Auftragsgräben und bei Einschnitten mit horizontalem Planum, ist die Grabentiefe in Blau einzuschreiben. Mit dem Wachsen der Grabentiefe in Einschnitten, ist, wie wir in dem Hauptabschnitt A § 8. gesehen haben, eine Erweiterung des Abtrags-Normalprofils verbunden, welcher Umstand bei dem Zeichnen des Bahnkörpers im Grundriss, nicht zu übersehen ist.

Das Zeichnen der Querprofile wird entbehrlich (siehe § 26. am Schluss).

Die Ermittelung des Punktes G Fig. 30c wollen wir speciell darlegen. Zu dem Zweck ist die Profil-Zeichnung Fig. 30d. Die Profilebene zu Fig. 30d ist parallel zu der durch die Mittellinie des Bahnkörpers gedachten Vertikalebene, und ist durch die Bezeichnung mit Buchstaben ersichtlich gemacht, welche Punkte in den Fig. 30a, 30b, 30c und 30d identisch sind. In Fig. 30d ist LK Profillinie des Terrains, HI ist die Projection der Planumsebene auf der vertikalen Profilebene.

Zunächst handelt es sich nun darum, zu ermitteln, wo der Punkt N liegt, in welchem die Linien LK und HI einander schneiden. Nennen wir zu dem Zwecke NI x, so gilt die Proportion:

$$3{,}90 : 20{,}0 = 2{,}60 : x$$

$$x = \frac{20{,}0 \cdot 2{,}60}{3{,}90} = 13{,}33.$$

Da die Profilebene Fig. 30d, wie Fig. 30c zeigt, nicht die Planumsebene, sondern die Böschungsfläche schneidet, so handelt es sich eigentlich darum, die Lage des Punktes G zu ermitteln, in welchem die Terrain-Profillinie LK die Böschungsfläche schneidet, und der Punkt N dient nur als Hilfspunkt zu diesem Zweck. Die Profilebene Fig. 30d schneidet die Böschungsfläche derart, dass der nach der Planumsseite abgeschnittene Theil derselben, eine Grundbreite von 0,8 M. hat, wie Fig. 30c zeigt, die Schnittlinie zwischen qu. Profilebene und der Böschungsfläche (siehe Fig. 30c) muss dann aber $\frac{2}{3} \cdot 0{,}8 = 0{,}53$ M. über der erweiterten Planumsebene liegen; wenn dies stattfindet, so liegt auch der jener Schnittlinie angehörige Punkt G 0,53 M. über der erweiterten Planumsebene, und es ist darnach

$$GO \text{ Fig. } 30\text{d} = 0{,}53 \text{ M.}$$

Nennen wir nun NO x, so folgt aus Fig. 30d, dass:

$$x : 0{,}53 = 13{,}33 : 2{,}60$$

$$x = \frac{0{,}53 \cdot 13{,}33}{2{,}60} = 2{,}72.$$

$NI - NO = 13{,}33 - 2{,}72 = 10{,}61 = IO$, wodurch der Punkt G in Fig. 30c bestimmt ist. Die übrigen Eckpunkte der Auftrags- und Abtragskörper Fig. 30c werden durch Auflösung einfacher Proportionen bestimmt. Den in Fig. 30c dargestellten Auslauf des Abtragsgrabens zu bestimmen, würde einen unmotivirten Zeitaufwand bei der Erdmassen-Berechnung erfordern; der Inhalt des Grabens wird hinlänglich genau ermittelt, wenn die Länge desselben äquirt angenommen wird, und sein normaler Querschnitt in dem vorliegenden Falle mit der Länge der Kante $PQ = 13{,}22$ M. multiplicirt wird. Der Graben würde darnach nur bis an die punktirte Linie darzustellen sein.

Die Inhalts-Berechnung für das gegebene Beispiel ist nun:

Auftrag.

$\frac{2{,}12 \cdot 1{,}56}{2} \cdot \frac{9{,}43}{3} =$	. . . . .	5,20 Cubkm.
$\left[(2 \cdot 1{,}56 + 1{,}86)\, 9{,}43 + (1{,}56 + 2 \cdot 1{,}86)\, 14{,}20\right] \frac{4{,}3}{12} =$		43,69 „
$\frac{(1{,}86 + 2{,}34 + 1{,}33 + 0)}{4}\, 14{,}20 \cdot 4{,}3 =$	. . . . .	84,42 „
$\left[(2 \cdot 1{,}33 + 0{,}92)\, 4{,}3 + (1{,}33 + 2 \cdot 0{,}92)\, 2{,}36\right] \frac{5{,}80}{12} =$		11,06 „
$\left[(2 \cdot 2{,}34 + 0{,}92)\, 4{,}22 + (2{,}34 + 2 \cdot 0{,}92)\, 3{,}33\right] \frac{20{,}0}{12} =$		62,59 „
	Sa.	206,96 Cubkm.

Abtrag.

$\frac{2{,}61 \cdot 2{,}07}{2} \cdot \frac{10{,}61}{3}$ = ... 9,55 Cubkm.

$[(2 \cdot 2{,}07 + 2{,}42)\ 10{,}61 + (2{,}07 + 2 \cdot 2{,}42)\ 13{,}22]\ 0{,}8 = 128{,}76$
$[(2 \cdot 2{,}42 + 1{,}75)\ 13{,}22 + (2{,}42 + 2 \cdot 1{,}75)\ 10{,}57]\ 2{,}9 = 434{,}11$
$[(2 \cdot 1{,}75 + 0{,}76)\ 10{,}57 + (1{,}75 + 2 \cdot 0{,}76)\ 5{,}80]\ 4{,}3 = 275{,}18$

$\frac{838{,}05}{12} = 69{,}84$ „

$\frac{1{,}94 \cdot 0{,}76}{2} \cdot \frac{5{,}80}{3}$ = ... 1,43 „

Sa. 80,82 Cubkm.

Hierzu der Graben: $\frac{2{,}3 + 0{,}8}{2} \cdot 0{,}5 \cdot 13{,}22 = 10{,}25$ „

Sa. 91,07 Cubkm.

Anmerkung. In § 29. ist ein Schema zu der Inhalts-Berechnung angegeben.

§ 26.

Vergleichung der verschiedenen Annäherungs-Methoden für die Inhalts-Berechnung, mit der rationellen Methode.

Die Configuration des Terrains gestattet häufig, auch wenn dieselbe hügelig ist, dass die Profilebenen 20 M. von einander gelegt, und die Nivellementspunkte rechts und links der Mittellinie auch in Distanzen von 20 M. von derselben angenommen werden können, ohne dass die Windschiefe der Terrainflächen-Abschnitte so gross wird, dass der Auslauf der Böschung erheblich von der geraden Linie abweicht. Diesen Annahmen ist das Beispiel entsprechend, welches Fig. 31 giebt. Wir wollen nun bei demselbeu zuerst wieder die rationelle Methode anwenden, bei welcher der Bahnkörper-Abschnitt in einen Mittelkörper und 2 seitliche Pyramiden zerlegt wird, dann eine andere Zerlegung vornehmen, drittens die Methode des Mittelns der Profile, viertens und fünftens zwei sehr gebräuchliche, auf Verwandelung der unregelmässigen Profilflächen beruhende Annäherungs-Methoden anwenden, um diese verschiedenen Methoden in Bezug auf die Richtigkeit der Resultate und den Umfang der Arbeit bei denselben, mit einander vergleichen zu können.

In dem Beispiel Fig. 31 ist eingeleisiges Planum angenommen, und die Bahnachse liegt nicht in der Mitte des Planums (siehe § 18.). § 24, *a*) haben wir dargethan, dass der practicabeln rationellen Erdmassen-Berechnung für den Eisenbahnkörper, eine Profilaufnahme zu Grunde liegen muss, bei welcher die correspondirenden Punkte der zusammengehörigen Profile gleichen Abstand von der Mittellinie haben; wenn wir nun die Resultate verschiedener Annäherungs-Methoden mit dem Resultate bei Anwendung der rationellen Methode, vergleichen

wollen, so müssen wir für alle diese Methoden dasselbe Beispiel anwenden, und es wird daher in diesem Falle auch bei der Erdmassen-Berechnung durch die Annäherungs-Methoden, die Profilaufnahme in der qu. Weise vorausgesetzt (siehe § 28.).

Bei allen jenen Methoden muss die Bestimmung der Punkte A, C, I, G stattfinden, in welchen die Böschungslinien der Profile die Terrainprofillinien schneiden, und wollen wir daher vorweg diese Aufgabe lösen.

$$FW = 3{,}40 + \frac{1{,}96 \cdot 0{,}7}{20{,}0} = 3{,}40 + 0{,}07 = 3{,}47$$

$$DX = 3{,}40 - \frac{2{,}40 \cdot 4{,}30}{20{,}0} = 3{,}40 - 0{,}52 = 2{,}88$$

$$MV = 5{,}22 + \frac{3{,}20 \cdot 0{,}7}{20.0} = 5{,}22 + 0{,}11 = 5{,}33$$

$$KY = 5{,}22 - \frac{1{,}12 \cdot 4{,}30}{20{,}0} = 5{,}22 - 0{,}24 = 4{,}98.$$

Ist $RF = x$, so ist

$$\tfrac{2}{3}\, x - \frac{1{,}96}{20{,}0}\, x = 3{,}47$$

$$\left(\tfrac{2}{3} - \frac{1{,}96}{20{,}0}\right) x = 3{,}47$$

$$x = 6{,}10.$$

Analog wird TM gefunden $= 10{,}52$.

Ist $DS = x$, so ist

$$\tfrac{2}{3}\, x + \frac{2{,}40}{20{,}0}\, x = 2{,}88$$

$$x = 3{,}66.$$

Analog wird KU gefunden $= 6{,}89$.

Inhalts-Berechnungs-Methode 1.

Hierzu bedarf es noch der Berechnung der Grösse der Kanten ab und cd der seitlichen Pyramiden.

$$ab : Ga = MV : MG$$

$$ab : MV = Ga : MG = Ff : FM$$

$$ab = \frac{5{,}33 \cdot 4{,}42}{10{,}52} = 2{,}24.$$

$$cd = \frac{4{,}98 \cdot 3{,}23}{6{,}89} = 2{,}33.$$

Der Inhalt ist nun:

$$\Big[(3{,}47 + 5{,}33 + 2{,}24)\ 6{,}10 + (3{,}47 + 3{,}40 + 5{,}22 + 5{,}33)\ 0{,}7$$

$$+ (3{,}40 + 2{,}88 + 4{,}98 + 5{,}22)\ 4{,}30 + (2{,}88 + 2{,}33 + 4{,}98)\ 3{,}66\Big] \frac{20{,}0}{4} = 938{,}49 \text{ Cbkm.}$$

$$\frac{(2{,}24 \cdot 4{,}42 + 2{,}33 \cdot 3{,}23)}{2} \frac{20{,}0}{3} = \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{58{,}09 \text{ „}}{}$$

Sa. 996,58 Cbkm.

Methode 2.

nach Formel 17.:

$$\Big[(2 \cdot 3{,}47 + 5{,}33)\ 6{,}10 + (3{,}47 + 2 \cdot 5{,}33)\ 10{,}52 + (2 \cdot 2{,}88 + 4{,}98)\ 3{,}66 + (2{,}88 + 2 \cdot 4{,}98)\ 6{,}89\Big] \frac{20{,}0}{12} = 585{,}45 \text{ Cubkm.}$$

nach Formel 13.:

$$\Big[(3{,}47 + 3{,}40 + 5{,}22 + 5{,}33)\ 0{,}7 + (3{,}40 + 2{,}88 + 4{,}98 + 5{,}22)\ 4{,}30\Big] \frac{20{,}0}{4} = 415{,}29 \text{ „}$$

Sa. 1000,74 Cubkm.

Methode 3.

Hierbei handelt es sich um die Grösse des Flächen-Inhaltes der Dreiecke *ABi, BkC, GgH, HhI.*

Zunächst ist daher die Grösse von Grundlinie und Höhe dieser Dreiecke zu bestimmen.

$iB = \frac{3}{2} \cdot 3{,}40 + 0{,}7 = 5{,}10 + 0{,}7 = 5{,}80.$
$Bk = 5{,}10 + 4{,}30 = 9{,}40.$
$Al = \frac{2}{3} \cdot 6{,}10 - 3{,}40 = 0{,}67.$
$mC = -\frac{2}{3} \cdot 3{,}66 + 3{,}40 = 0{,}96.$
$gH = \frac{3}{2} \cdot 5{,}22 + 0{,}7 = 7{,}83 + 0{,}7 = 8{,}53.$
$Hh = 7{,}83 + 4{,}30 = 12{,}13.$
$Gn = \frac{2}{3} \cdot 10{,}52 - 5{,}22 = 1{,}79.$
$oI = 5{,}22 - \frac{2}{3} \cdot 6{,}89 = 0{,}63.$

Nun ist nach der Profil-Tabelle für die Auftragshöhe 3,40 M. der Flächen-Inhalt des Profils

= 34,34 □ M.

dazu $\triangle\ AiB = \frac{5{,}80 \cdot 0{,}67}{2}$ = 1,94 „

Sa. 36,28 □ M.

davon ab $\triangle\ BkC = \frac{9{,}40 \cdot 0{,}96}{2}$ = 4,51 „

bleibt 31,77 □ M. (Profil I.)

Für die Auftragshöhe 5,22 ist der Flächen-Inhalt des Profils

= 66,97 □ M.

dazu $\triangle\ GgH = \frac{8{,}53 \cdot 1{,}79}{2}$ = 7,63 „

Sa. 74,60 □ M.

davon ab $\triangle\ HhI = \frac{12{,}13 \cdot 0{,}63}{2}$ = 3,82 „

bleibt 70,78 □ M. (Profil II.)

Der körperliche Inhalt ist dann:

$$\frac{31{,}77 + 70{,}78}{2} \cdot 20{,}0 = 1025{,}50 \text{ Cubkm.}$$

Methode 4.

$$\triangle AiB = + 1{,}94 \text{ □M.}$$
$$\triangle BkC = - 4{,}51 \text{ „}$$
$$\text{Sa.} \quad - 2{,}57 \text{ □M.}$$

2,57 □M. wird in der Profil-Tabelle aufgesucht, und es findet sich dafür 0,45 M. Auftragshöhe.

Für Profil I. gilt darnach die Auftragshöhe

$$3{,}40 - 0{,}45 = 2{,}95 \text{ M.}$$

$$\triangle GgH = 7{,}63 \text{ □M.}$$
$$\triangle HhI = - 3{,}82 \text{ „}$$
$$\text{Sa.} \quad + 3{,}81 \text{ □M.}$$

3,81 □M. wird in der Profil-Tabelle aufgesucht, und es findet sich dafür 0,64 M. Auftragshöhe.

Für Profil II. gilt darnach die Auftragshöhe

$$5{,}22 + 0{,}64 = 5{,}86 \text{ M.}$$

Die Auftragshöhen der beiden Profile gemittelt giebt

$$\frac{2{,}95 + 5{,}86}{2} = 4{,}41 \text{ M.}$$

und hierfür aus der Tabelle die Profilfläche genommen, ist 51,20 □M.

Der körperliche Inhalt ist dann

$$51{,}20 \cdot 20{,}0 = 1024{,}00 \text{ Cubkm.}$$

Methode 5.

Für die Profilfläche I. = 31,77 □M. (siehe Methode 3.) wird in der Tabelle die Auftragshöhe 3,23 M., für die Profilfläche II. = 70,78 □M. die Auftragshöhe 5,40 M. gefunden.

Diese Auftragshöhen gemittelt, ist

$$\frac{3{,}23 + 5{,}40}{2} = 4{,}32 \text{ M.}$$

Behufs der späteren Vergleiche ist es erforderlich diesen Werth genauer zu ermitteln, wie es durch die Profil-Tabelle geschehen kann; dann ist derselbe =

$$\frac{3.2280 + 5{,}4019}{2} = 4{,}3149 \text{ M.}$$

Hierfür ist die Profilfläche = 49,5020 □M. (Nach der Profil-Tabelle für 4,32 M. Auftragshöhe = 49,59 □M.)

Der körperliche Inhalt ist dann

$$49{,}5020 \cdot 20{,}0 = 990{,}04 \text{ Cubkm. (für 49,59 □M. würde er}$$
$$991{,}80 \text{ Cubkm. sein).}$$

Vergleichen wir nun diese verschiedenen Inhalts-Berechnungs-Methoden mit einander.

Bei dem gegebenen Beispiel Fig. 31 wirkt die Windschiefe der Terrainflächen-Abschnitte linksseitig, sowie rechtsseitig der Mittellinie, negativ auf den Inhalt der beiden seitlichen Pyramiden, weil vom Fusse derselben ab nach der Spitze zu, linksseitig das Fallen abnimmt, rechtsseitig das Steigen zunimmt. Würde diese Windschiefe berücksichtigt, so müsste also der Inhalt jener Pyramiden etwas kleiner werden, wie er sub Methode 1. ermittelt worden ist, und da der Mittelkörper zwischen den beiden Pyramiden nach den gegebenen Stücken mathematisch richtig berechnet ist, so ist der für den Inhalt des ganzen Körpers sub Methode 1. gefundene Werth etwas zu gross. Wir wollen aber mit Rücksicht darauf, dass die Windschiefe in dem vorliegenden Falle nicht so gross ist, dass sie auf den Inhalt jener Pyramiden einen erheblichen Einfluss hat, den sub Methode 1. ermittelten Werth für den Inhalt des Körpers, als richtig ansehen.

Bei Methode 2. ist für die Böschungskörper die Formel 17. angewendet. Hierbei ist vorausgesetzt, dass AG und CI (Fig. 31c) gerade Linien sind, wie dies auch bei Methode 1. vorausgesetzt wurde. Es ist nun nachzuweisen, dass diese Licenz bei Methode 2. mehr von Belang ist, wie bei Methode 1.; in jenem Falle influirt sie auf den Inhalt der ganzen Böschungskörper, in diesem Falle nur auf den Inhalt der beiden Pyramiden.

Es genügt, an einem Querschnitt, etwa auf 0,4 der Distanz der beiden Profile, von der Grundfläche der Pyramiden ab gerechnet, dieses näher zu erläutern. Stellen wir dazu den in pq Fig. 31c angedeuteten Querschnitt in Fig. 31d dar, und zwar der Deutlichkeit wegen etwas karrikirt.

Denken wir uns in Fig. 15 den Abstand e nahezu 0, so wird $c = b$ und $k = g$, aus Formel 17. $I = \left[(2b + c)\, g + (b + 2c)\, k\right] \frac{e}{12}$, wird

$$I = \left[(2b + b)\, g + (b + 2b)\, g\right] \frac{e}{12}$$

$$I = \left(3b \cdot g + 3b \cdot g\right) \frac{e}{12}$$

$$I = \frac{6}{12}\, b \cdot g \cdot e = \tfrac{1}{2}\, b \cdot g \cdot e.$$

$\frac{1}{2}\, b \cdot g$ ist aber der Ausdruck für den Flächen-Inhalt eines Dreiecks, und als solches stellt sich der Querschnitt rvw in Fig. 31d dar.

Es war das $\triangle$ svw zu berechnen

$$\frac{8{,}62 \cdot 4{,}58}{2} = 19{,}74 \,\square\text{M.}$$

Dagegen ist berechnet worden

bei Methode 1.

$$\triangle rtu = \frac{2{,}65 \cdot 1{,}34}{2} = 1{,}78 \text{ □M.}$$

$$\triangle uwvt = 6{,}10 \frac{(1{,}34 + 4{,}58)}{2} = 18{,}06 \text{ „}$$

Sa. 19,84 □M.

bei Methode 2.

$$\triangle rvw = \frac{8{,}75 \cdot 4{,}58}{2} = 20{,}04 \text{ □M.}$$

Aus diesen Berechnungen geht hervor, weshalb bei Methode 2. ein grösserer Werth für den Inhalt des Erdkörpers gefunden wird, wie bei Methode 1., und dass man bei Anwendung dieser Methode der Wahrheit am nächsten kommt. In Bezug auf Zeiterforderniss bei der Anwendung, dürfte bei diesen beiden Methoden kein Unterschied sein, da die Ausrechnung der Exempel für *ab* und *cd* (Fig. 31a) bei Methode 1., aufgewogen wird durch die leichtere Berechnungsweise für den Inhalt, bei dieser Methode.

Methode 3. betreffend, sei erwähnt, dass der Fehler in Bezug auf die falsche Berechnung des Inhaltes der seitlichen Pyramiden, durch Vermehrung der Profile vermindert wird (siehe § 3.).

Die Anwendung der Methode 4. ist durchaus nicht zu empfehlen.

Erstens ist anzuführen, dass bei dieser Methode ein Verfahren zur Anwendung kommt, bei welchem die unregelmässigen, einander weder gleichen noch ähnlichen, aber zu einander parallelen Profilflächen durch regelmässige symmetrische Flächen von mit je einer Profilfläche gleichem Flächen-Inhalt ersetzt werden, wonach dann die Inhalts-Berechnung des in solcher Weise substituirten Körpers stattfindet, obschon nur bei prismatischen Körpern dieses Verfahren stattfinden kann, ohne dass der Inhalt des Körpers dadurch ein anderer wird.

Bei Beurtheilung der Methode 5. wird qu. Verfahren in Bezug auf das vorliegende Beispiel etc. noch näher erörtert werden. Es wird dort gezeigt werden, dass bei qu. Beispiele der mit jenem Verfahren verbundene Fehler positiv ist, in einem andern Falle negativ.

Zweitens ist das wesentliche Moment, dass bei dem Auftrags- resp. Abtragsprofil die Flächen mit den Höhen resp. Tiefen, nicht gleichmässig, sondern in bestimmter Progression wachsen, und dass die Höhen für Profilflächen-Abschnitte von derselben Grösse aber in verschiedenen Abständen von dem Planum, sehr verschieden gross sein müssen, bei Methode 4. gauz ausser Acht gelassen. Bei derselben werden für Flächen-Abschnitte der untersten Schicht des Auftrages,

resp. obersten Schicht des Abtrages, welcher relativ kleine Höhen entsprechen, die in allen Fällen grösseren, bei hohen Aufträgen resp. tiefen Abträgen sehr viel grösseren absoluten Höhenzahlen aus der Profil-Tabelle entnommen. Diese zu grossen Höhenzahlen werden dann den Höhen in der Mittellinie zugezählt, resp. von denselben abgezogen, und nun die so veränderten Höhen zweier zusammengehöriger Profile gemittelt, zu diesem arithmetischen Mittel wird die Profilfläche in der Tabelle aufgeschlagen etc. Sind qu. zu grosse Höhenzahlen den Höhen in der Mittellinie hinzuzufügen, so wirkt die in Rede stehende Fehlerquelle im positiven Sinne, sind sie von den Höhen in der Mittellinie abzuziehen, so wirkt diese Fehlerquelle im negativen Sinne. Fügt der Zufall es nun nicht gerade so günstig, dass beim Mitteln der Höhenzahlen die Fehler der zweiten Fehlerquelle einander ganz oder annähernd aufheben, oder dass die Fehler der verschiedenen Fehlerquellen einander compensiren, so treten sehr beträchtliche Unrichtigkeiten bei Anwendung dieser Methode ein. Obschon die Fehlerquelle der unrichtigen Berechnung des Inhaltes der seitlichen Pyramiden, bei dieser Methode, insofern als die Höhenmaasse dabei gemittelt werden, stets negativ wirkt, und da der Fehler aus der zweiten Fehlerquelle bei dem gegebenen Beispiele positiv ist, ein theilweises Compensiren dieser Fehler stattfindet, so ist der Fehler dennoch im positiven Sinne bei dem gegebenen Beispiele beträchtlich geblieben. In einem spätern Beispiele (§ 28.) stellt sich der Fehler bei dieser Berechnungs-Methode auf 22 % heraus.

Bei Methode 5. ist das Verfahren, für die unregelmässigen Profilflächen Behufs der Inhalts-Berechnung des zwischenliegenden Bahnkörpers regelmässige Profilflächen mit horizontalen Grundlinien zu substituiren, wieder angewendet, nur kommt hier der bei Beurtheilung der Methode 4. hervorgehobene 2te Fehler nicht vor. Wir wollen nun auf jenes Substitutions-Verfahren näher eingehen, und an unserem Beispiele den Vergleich anstellen, wie sich der rationell berechnete Inhalt des substituirten Körpers zu dem in Methode 1. bereits auf 996,58 Cubkm. rationell berechneten Inhalt des eigentlich gegebenen Körpers herausstellt. Werden die bei Methode 3. berechneten Profilflächen als Profilflächen mit horizontaler Grundlinie angesehen, wie es bei Methode 5. geschieht, so entsteht zwischen denselben ein Körper, dessen Inhalt nach Formel 1. mathematisch richtig zu berechnen ist. Dieser Berechnung nach hat der substituirte Körper einen Inhalt von 1001,88 Cubkm., und ist daher um $1001{,}88 - 996{,}58 = 5{,}30$ Cubkm. grösser wie der eigentliche Körper. Wird aber der Inhalt des substituirten Körpers nicht nach der mathematisch richtigen Formel, sondern nach

der Methode des Mittelns der Höhen berechnet, wie es bei Methode 5. geschieht, so wird der — Fehler, der hierbei stattfindet, theilweise compensirt durch den + Fehler, 5,30 Cubkm., welcher aus der Substituirung des symmetrischen Körpers für den unsymmetrischen Körper resultirt; denn der Inhalt des substituirten Körpers nach der Methode des Mittelns der Höhen berechnet, beträgt 990,04 Cubkm., also

1001,88 — 990,04 = 11,84 Cubkm. weniger, wie nach der mathematisch richtigen Formel berechnet, aber nur

996,58 — 990,04 = 6,54 Cubkm. weniger, wie der richtig berechnete Inhalt des eigentlichen Körpers beträgt, weil der Unterschied dieser Differenzen 11,84 — 6,54 = 5,30 Cubkm. der oben genannte Werth ist, um welchen der Inhalt des substituirten Körpers grösser ist, wie der Inhalt des eigentlichen (wenn beide Inhalts-Berechnungen rationell gemacht werden).

Um darlegen zu können, weshalb der Inhalt des substituirten Körpers rationell berechnet, in dem vorliegenden Beispiel grösser wird wie der Inhalt des eigentlichen Körpers, und in welchem Falle das Gegentheil zutrifft, wollen wir den substituirten Körper noch einmal berechnen, und zwar jetzt der Methode 1. conform, durch Zerlegung in einen Mittelkörper und 2 seitliche Pyramiden, und stellen den Körper zu dem Zweck in Fig. 32 dar.

$$\text{Mittelkörper: } \Big[\frac{(0 + 3{,}2280 + 5{,}4019 + 2{,}1739)}{4}\, 4{,}842 \cdot 2 + \frac{(3{,}2280 \cdot 2 + 5{,}4019 \cdot 2)}{4}\, 5{,}0\Big]\, 20{,}0 = 954{,}62 \text{ Cubkm.}$$

die beiden seitlichen Pyramiden:

$$\frac{3{,}2608 \cdot 2{,}1739}{2} \cdot \frac{20{,}0}{3} \cdot 2 = 47{,}26 \text{ „}$$

Sa. 1001,88 Cubkm.

wie nach Formel 1. ebenfalls oben gefunden worden ist.

Vergleichen wir nun im Einzelnen dieses Ergebniss mit dem Exempel bei Methode 1., so ist bei ersterem in Bezug auf den Mittelkörper ein + von 954,62 — 938,49 = 16,13 Cubkm., in Bezug auf die beiden seitlichen Pyramiden ein — von 58,09 — 47,26 = 10,83 Cubkm., die Transformation der Profilflächen hat also bewirkt, dass bei dem substituirten Körper der Mittelkörper mehr, und die seitlichen Pyramiden weniger zur Geltung kommen, wie bei dem eigentlichen Körper, und darin ist es eben begründet, dass der substituirte Körper 5,30 Cubkm. mehr Inhalt hat wie der eigentliche, da der Mittelkörper relativ mehr auf die cubische Masse influirt wie die Pyramiden. Drücken wir die

resp. Grössen-Verhältnisse nach den Grundflächen bei derselben Länge aus, so hat der substituirte Mittelkörper

$$\frac{954.62}{20,0} = 47,7310 \square\text{M. Grundfläche}$$

der eigentliche Mittelkörper:

$$\frac{938,49}{20,0} = 46,9245 \quad „ \qquad „$$

$$\text{Differenz} = \quad 0,8065 \square\text{M. bei } 20,0 \text{ M. Länge.}$$

Die beiden seitlichen Pyramiden haben bei dem substituirten Körper:

$$\frac{3,2608 \cdot 2,1739}{2} \cdot 2 = 7,08865 \square\text{M. Grundfläche}$$

bei dem eigentlichen Körper:

$$\frac{2,24 \cdot 4,42 + 2,33 \cdot 3,23}{2} = 8,71340 \quad „ \qquad „$$

$$\text{Differenz} = \; - \; 1,62475 \square\text{M. bei } 20,0 \text{ M. Länge.}$$

Darnach ist der Unterschied der Mittelkörper der prismatische Körper

$$0,8065 \cdot 20,0 = \quad + 16,13 \text{ Cubkm.}$$

der Unterschied der beiden seitlichen Pyramiden dagegen der pyramidenförmige Körper

$$- 1,62475 \cdot \frac{20,0}{3} = \quad - 10,83 \quad „$$

$$\text{Sa.} \quad + \quad 5,30 \text{ Cubkm.}$$

für den Ueberschuss des Inhaltes des substituirten Körpers im Vergleich mit dem Inhalt des eigentlichen Körpers.

Vergleichen wir nun die seitlichen Pyramiden der Fig. 32 mit denen der Fig. 31, so finden wir in Bezug auf die linksseitigen Pyramiden, dass bei der Verwandelung des unregelmässigen Körpers in den symmetrischen, der Punkt *G* stärker wie der Punkt *A* (Fig. 31a und b) nach der Mittellinie hinrückt. Hiermit hat es folgende Bewandtniss: In Profil I. wird bei dem Compensiren der + und — Dreiecke gegen einander, durch den — Rest die Auftragshöhe und damit die Grundbreite um etwas kleiner gestaltet, wie sie durch die eigentliche Höhe in der Mittellinie, 3,40 M. bedingt wäre, und es resultirt hieraus ein Heranrücken des Punktes *A* nach der Mittellinie; die linksseitige Grundbreite bei Profil II. wird dagegen bei dem Compensiren der resp. Dreiecke gegen einander, etwas grösser, wie sie durch die eigentliche Höhe in der Mittellinie 5,22 M., bedingt wäre, wodurch ein Abrücken des Punktes *G* von der Mittellinie bedingt ist. Dass nun bei Punkt *G* dennoch ein Heranrücken an die Mittellinie stattfindet, und zwar wie oben gesagt, ein stärkeres Heranrücken wie bei dem Punkte *A*, ist dadurch begründet, dass ein anderer Umstand noch von grösserem

Einfluss ist, nämlich, dass bei beiden Punkten in den resp. Profilen ein Anrücken an die Mittellinie bei der Verwandelung, insofern stattfinden muss, als bei dem symmetrischen Körper das Quergefälle in Wegfall kommt, bei dem Punkt *G* aber dieses Moment von viel grösserem Belang ist wie bei dem Punkte *A*, weil bei Profil II. sowohl eine grössere Auftragshöhe als auch ein stärkeres linksseitiges Quergefälle ist wie bei Profil I. Was die rechtsseitigen Pyramiden anbetrifft, so ist die Steigung hier nicht bei dem höhern Auftrage in Profil II., sondern bei dem niedrigern Auftrage in Profil I. die stärkere, der Punkt *C* rückt bei der Verwandelung des Körpers daher ziemlich in gleicher Weise von der Mittellinie ab wie Punkt *I*, so dass die Grundflächen und damit die Inhalte der rechtsseitigen Pyramiden bei den beiden Körpern sehr wenig von einander verschieden sind.

Denken wir uns, dass bei Fig. 31 Profil I. die Auftragshöhe kleiner, das linksseitige Fallen grösser und das rechtsseitige Steigen bei diesem Profil kleiner wird, Profil II. ungeändert bleibt, so wird bei der Verwandelung des unregelmässigen Körpers in den symmetrischen, der Punkt *A* eventuell stärker wie der Punkt *G* nach der Mittellinie hingerückt, der Punkt *C* schwächer wie der Punkt *I* von der Mittellinie abgerückt, so dass die Grundflächen, und damit die körperlichen Inhalte der beiderseitigen Pyramiden bei dem substituirten Körper grösser werden wie bei dem eigentlichen Körper.

Die Fig. 33 entspricht dieser Combination, ausserdem ist Profil I. so gewählt, dass die seitlichen Pyramiden bei Fig. 33 genau so gross sind wie bei Fig. 31. Die Profile sollen wieder 20,0 M. von einander entfernt sein.

Der Inhalt des Körpers Fig. 33 ist:

Mittelkörper:

$$\Big[(2{,}75 + 5{,}33 + 2{,}24)\,6{,}10 + (2{,}75 + 2{,}60 + 5{,}22 + 5{,}33)\,0{,}7$$
$$+ (2{,}60 + 2{,}51 + 4{,}98 + 5{,}22)\,4{,}30 + (2{,}51 + 2{,}33 + 4{,}98)\,3{,}66\Big]\frac{20{,}0}{4} = 879{,}28 \text{ Cbkm.}$$

Die beiden seitlichen Pyramiden:

$$\frac{(2{,}24 \cdot 4{,}42 + 2{,}33 \cdot 3{,}23)}{2}\,\frac{20{,}0}{3} = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 58{,}09 \text{ „}$$

Sa. 937,37 Cbkm.

Profilfläche I. (Fig. 33b):

Bei 2,60 M. Auftrag = 23,14 □M.

$+ \triangle \frac{4{,}6 \cdot 1{,}47}{2} = \ldots\ 3{,}381$ „

·/. 26,521 □M.

$- \triangle \frac{8{,}2 \cdot 0{,}16}{2} = -\ 0{,}656$ „

Sa. 25,865 □M.

Dazu gehört (Fig. 34b) die Auftragshöhe 2,8078 M., Profilfläche II. (Fig. 34a) wie Fig. 32a.

Der Inhalt des Körpers Fig. 34 nach Methode 1. berechnet, ist:

Mittelkörper:

$$\Big[(0 + 2{,}8078 + 5{,}4019 + 2{,}5941)\ 4{,}2117 \cdot 2 + (2{,}8078 \cdot 2 + 5{,}4019 \cdot 2)\ 5{,}0\Big]\frac{20{,}0}{4} = \quad \ldots\ldots \quad 865{,}51 \text{ Cubkm.}$$

Die beiden seitlichen Pyramiden:

$$\frac{3{,}8911 \cdot 2{,}5941}{2} \cdot \frac{20{,}0}{3} \cdot 2 = \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 67{,}29 \text{ „}$$

Sa. 932,80 Cubkm.

Der Inhalt des Körpers Fig. 34 der Methode 5. entsprechend durch Mitteln der Höhen berechnet, ist:

$\frac{2{,}8078 + 5{,}4019}{2} = 4{,}10485$ M. mittlere Höhe.

Dafür ist das Profil = 45,79889 □M.

Inhalt = 45,79889 · 20,0 = 915,98 Cubkm.

Bei dem letzteren Beispiele wird der mit dem Mitteln der Höhen verbundene Fehler durch den Fehler bei der Verwandelung der Profile vergrössert, beide Fehler sind in diesem Falle negativ; denn der Inhalt des substituirten Körpers beträgt nach der Methode des Mittelns der Höhen berechnet,

932,80 — 915,98 = 16,82 Cubkm. weniger wie mathematisch richtig berechnet, und

937,37 — 915,98 = 21,39 Cubkm. weniger wie der richtig berechnete Inhalt des eigentlichen Körpers beträgt.

Der Unterschied dieser Differenzen ist 21,39 — 16,82 = 4,57 Cubkm., um so viel (937,37 — 932,80 = 4,57 Cubkm.) ist der mathematisch richtig berechnete Inhalt des substituirten Körpers kleiner wie der richtig berechnete Inhalt des eigentlichen Körpers.

Die Berechnungen zeigen, dass in diesem Falle bei dem substituirten Körper der Mittelkörper weniger, und die seitlichen Pyramiden mehr, zur Geltung kommen wie bei dem eigentlichen Körper. Die Pyramide influirt aber auf die cubische Masse nicht in dem Maasse wie der Mittelkörper, und es lässt sich analog wie es bei dem entgegengesetzten Fall geschah, hier zeigen, dass jener Umstand den negativen Fehler (dort positiven Fehler) bei der Verwandelung der Profilflächen veranlasst.

Es geht aus diesen Erörterungen hervor, dass auch bei Anwendung der Methode 5. eine grosse Unsicherheit in den Resultaten stattfindet.

In den Fällen, wo nicht allein Durchgänge vom Auftrag zum Abtrag zwischen 2 Profilen, sondern auch gemischte Profile (Auftrag und Abtrag in demselben Profil) vorkommen, ist die Construction der Durchgänge im Grundriss, zu einer richtigen Massen-Berechnung unentbehrlich, wie die Fig. 30 so augenscheinlich zeigt, dass ein Eingehen auf den empirischen Weg, bei dem diese Construction nicht stattfindet, überflüssig erscheint.

Was den Zeitaufwand anbetrifft, so ist darauf hinzuweisen, dass bei Anwendung der rationellen Methode 1. das umständliche Darstellen der Terrain-Querprofile mit den Normal-Profilen des Bahnkörpers, allen Maasszahlen und der Berechnung des Flächen-Inhaltes der Profile als Grundlage für die Inhalts-Berechnung der Bahnkörper-Abschnitte, fortfallen kann; insofern als die Darstellung des Bahnkörpers im Grundriss, nach dem Manuale für die Aufnahme der Querprofile, stattfinden, und wie aus Fig. 30c und den in § 25. dazu gegebenen Erläuterungen erhellt, auf Grund dieser Darstellung die Erdmassen-Berechnung ausgeführt werden kann.

§ 27.

Modification der rationellen Inhalts-Berechnungs-Methode 1., wenn ausser dem Grundriss des Bahnkörpers auch die Querprofile gezeichnet werden.

Wenn die Aufzeichnung der Querprofile stattfindet, so lässt sich die Methode 1. in nachstehender Weise modificiren.

Methode 1a.

Es ist nach Methode 3. die Profilfläche I. (Fig. 31) = 31,77 □M.,

die Profilfläche II. = ... 70,78 □M.

die Grundflächen der beiden seitlichen Pyramiden sind:

$$\frac{2{,}24 \cdot 4{,}42 + 2{,}33 \cdot 3{,}23}{2} = \ldots\ldots\ldots 8{,}71 \text{ „}$$

mithin gehören 62,07 □M.

in Profilfläche II. zum Mittelkörper.

Der Inhalt des Mittelkörpers ist nun

$$= \frac{(31{,}77 + 62{,}07)}{2}\ 20{,}0 = \ldots\ldots\ldots 938{,}40 \text{ Cubkm.}$$

Der Inhalt der beiden seitlichen Pyramiden

$$= 8{,}7133 \cdot \frac{20}{3} = \ldots\ldots\ldots 58{,}09 \text{ „}$$

Der Inhalt des Bahnkörper-Abschnittes = 996,49 Cubkm.

Die Differenz mit dem Resultate nach Methode 1. 996,58—996,49 = 0,09 Cubkm. ist durch die Abrundungen beim Rechnen motivirt.

§ 28.

Art der Aufnahme der rechtwinklig zur Bahnachse liegenden Querprofile.

Bei dem Beispiele Fig. 31 zur Vergleichung der verschiedenen Inhalts-Berechnungs-Methoden haben wir die zusammengehörigen Profile von der Beschaffenheit annehmen müssen, wie sie nach § 24a. bei Anwendung der praktikabelen rationellen Inhalts-Berechnungs-Methode vorausgesetzt werden, so dass die correspondirenden Punkte der zusammengehörigen Querprofile gleichen Abstand von der Mittellinie haben. Bei der üblichen Querprofil-Aufnahme, die das Material für die Inhalts-Berechnung nach den beschriebenen Annäherungs-Methoden giebt, wird jenes Princip nicht beobachtet. § 24a. haben wir darauf hingewiesen, dass dann eine rationelle Erdmassen-Berechnung nur auf sehr umständliche Weise ausgeführt werden kann.

In Fig. 23 war der Fall zur Darstellung gebracht, dass die correspondirenden Punkte in den zusammengehörigen Profilen nicht gleichen Abstand von der Mittellinie haben. Wir wollen nun den Mittelkörper des in jener Figur dargestellten Bahnkörper-Abschnittes einmal mathematisch berechnen, und dann durch die Annäherungs-Methode des Mittelns der Profile; der Kürze wegen werden wir die vielen Constructions-Berechnungen, welche hierbei erforderlich sind, nicht besonders anführen. Zufolge der Profil-Aufnahme besteht die Terrainfläche, auf welcher der Bahnkörper-Abschnitt ruht, aus

der windschiefen Fläche *abih*,
der Ebene *bci*,
der windschiefen Fläche *cdki*,
der windschiefen Fläche *delk*,
der Ebene *efl*,
der Ebene *fgl*.

Zur Erleichterung der Berechnung wollen wir uns den Mittelkörper zu einem prismatischen Körper ergänzt denken, wie in der Figur angedeutet ist, den Inhalt desselben durch die Theilkörper berechnen, und darnach den Inhalt der beiden seitlichen Ergänzungskörper in Abzug bringen. Die 3 eingeklammerten Maasse in Fig. 23c sind Höhenmaasse.

Erste Berechnungsweise.

Die prismatischen Körper mit den Grundflächen

$AibD_1$

$$\left[(2 \cdot 5{,}61 + 2 \cdot 4{,}44 + 6{,}00 + 6{,}79)\, 4{,}91 + (5{,}61 + 4{,}44 + 2 \cdot 6{,}00 + 2 \cdot 6{,}79)\, 3{,}91\right] \frac{20{,}0}{12} = 501{,}34 \text{ Cubkm.}$$

bci

$$\frac{(6{,}00 + 7{,}30 + 4{,}44)}{3} \cdot \frac{4{,}0 \cdot 20{,}0}{2} = \ldots\ldots\ldots\ 236{,}53 \text{ „}$$

$ikdc$

$$\left[(2 \cdot 4{,}44 + 2 \cdot 3{,}96 + 5{,}60 + 7{,}30)\, 8{,}0 + (4{,}44 + 3{,}96 + 2 \cdot 5{,}60 + 2 \cdot 7{,}30)\, 5{,}0\right] \frac{20{,}0}{12} = 681{,}00 \text{ „}$$

$kBQP$

$$\frac{(3{,}96 + 4{,}20 + 4{,}73 + 4{,}43)}{4}\, 10{,}8 \cdot 5{,}68 = \ldots\ldots\ 265{,}62 \text{ „}$$

$PQed$

$$\left[(2 \cdot 4{,}43 + 2 \cdot 4{,}73 + 5{,}90 + 5{,}60)\, 10{,}8 + (4{,}43 + 4{,}73 + 2 \cdot 5{,}90 + 2 \cdot 5{,}60)\, 4{,}0\right] \frac{14{,}32}{12} = 537{,}83 \text{ „}$$

QRe

$$\frac{(4{,}73 + 5{,}74 + 5{,}90)}{3} \cdot \frac{3{,}32 \cdot 6{,}8}{2} = \ldots\ldots\ldots\ 61{,}59 \text{ „}$$

Rfe

$$\frac{(5{,}74 + 7{,}56 + 5{,}90)}{3} \cdot \frac{3{,}5 \cdot 11{,}0}{2} = \ldots\ldots\ldots\ 123{,}20 \text{ „}$$

RC_1f

$$\frac{(5{,}74 + 6{,}80 + 7{,}56)}{3} \cdot \frac{3{,}3 \cdot 11{,}0}{2} = \ldots\ldots\ldots\ 121{,}61 \text{ „}$$

Sa. 2528,72 Cubkm.

Davon ab die beiden dreiseitigen Ergänzungs-

prismen: $\left(8{,}41 \cdot 5{,}61 + 6{,}3 \cdot 4{,}2\right) \frac{20{,}0}{2} =$ 736,40 „

bleibt für den Mittelkörper = 1792,32 Cubkm.

Zweite Berechnungsweise:

$$\frac{(5{,}61 + 4{,}44)}{2} \cdot 4{,}91 = \ldots\ldots\ 24{,}67 \ \square\text{M.}$$

$$\frac{(4{,}44 + 3{,}96)}{2} \cdot 8{,}0 = \ldots\ldots\ 33{,}60 \text{ „}$$

$$\frac{(3{,}96 + 4{,}20)}{2} \cdot 10{,}8 = \ldots\ldots\ 44{,}06 \text{ „}$$

Sa. 102,33 □M.

davon ab die beiden Ergänzungsflächen

$$\frac{8{,}41 \cdot 5{,}61 + 6{,}3 \cdot 4{,}2}{2} = 36{,}82 \text{ „}$$

Profilfläche I. = 65,51 □M.

$\frac{(6{,}79 + 6{,}00)}{2} \cdot 3{,}91 = \ldots\ldots 25{,}00$ □M.

$\frac{(6{,}00 + 7{,}30)}{2} \cdot 4{,}0 = \ldots\ldots 26{,}60$ „

$\frac{(7{,}30 + 5{,}60)}{2} \cdot 5{,}0 = \ldots\ldots 32{,}25$ „

$\frac{(5{,}60 + 5{,}90)}{2} \cdot 4{,}0 = \ldots\ldots 23{,}00$ „

$\frac{(5{,}90 + 7{,}56)}{2} \cdot 3{,}5 = \ldots\ldots 23{,}56$ „

$\frac{(7{,}56 + 6{,}8)}{2} \cdot 3{,}3 = \ldots\ldots 23{,}69$ „

Sa. 154,10 □M.

Davon ab die beiden Ergänzungsflächen:

$\frac{8{,}41 \cdot 5{,}61 + 6{,}3 \cdot 4{,}2}{2} = 36{,}82$ „

Profilfläche II. = 117,28 □M.

Der Inhalt $= \frac{(65{,}51 + 117{,}28)}{2} \cdot 20{,}0 = 1827{,}90$ Cubkm.

Differenz gegen die mathematisch richtige Berechnungsweise 1.

$= 1827{,}90 - 1792{,}32 = + 35{,}58$ Cubkm.

oder $\frac{100 \cdot 35{,}58}{1792{,}32} =$ rotd. $+ 2\,\%$.

Bei der Berechnungsweise 2. ist der zwischen den Profilen liegende Körper nicht mit seiner wirklichen aus den bei Berechnungsweise 1. speciell bezeichneten Theilflächen bestehenden Grundfläche zur Berechnung gekommen, sondern nach § 24a mit einer Grundfläche, die dadurch bestimmt ist, dass man sich parallel zur Bahnachse neben einander, so weit wie die Terrainfläche von dem Körper bedeckt wird, nahezu unendlich viele gerade Linien von dem einen zu dem andern Profil denkt. In Fig. 23 ist aus dem Grundriss und den Profilen ersichtlich, dass, wenn die Terrainfläche ohne den Bahnkörper gedacht wird, diese Linien theilweise durch die Luft, theilweise durch die Erde gehen; in dem ersten Falle wird die wirkliche Inhaltsmasse des Bahnkörpers vermindert, in dem zweiten Falle vermehrt. Diese beiden Fehler compensiren sich in dem vorliegenden Beispiele insoweit, dass nur ein Fehlerrest von $+ 2\,\%$ bleibt.

Um weitere Vergleichungen machen zu können, wollen wir nun auch noch die beiden seitlichen pyramidenförmigen Körper berechnen. Der linksseitige pyramidenförmige Körper ruht auf einer sehr wenig windschiefen Fläche, und ist daher als Pyramide richtig zu berechnen, der rechtsseitige pyramidenförmige Körper besteht aber eigentlich aus drei Körpern, weil er auf drei verschiedenen Flächen ruht; zur mathe-

matisch richtigen Berechnung müssten die drei Theilkörper noch zerlegt werden, und es würde diese Berechnungsweise höchst complicirt sein. Wie das Resultat dieser Berechnung von dem Resultat, welches durch die Berechnung des qu. pyramidenförmigen Körpers als Pyramide, erhalten wird, abweicht, lässt sich an der Linie BC_1 beurtheilen. Diese Linie ist eigentlich eine gebrochene Linie, die Brechpunkte sind Q_1 (senkrecht unter Q) und R_1 (senkrecht unter R). Unter der Linie UV liegt Q_1 4,73 M., R_1 5,74 M. Wird der seitliche Körper als Pyramide mit der Grundfläche C_1CH und der Spitze B berechnet, so gilt BC_1 als gerade Linie, und werden für diese nach den beiden Profilen die Abstände der Punkte Q_2 (senkrecht unter Q) und R_2 (senkrecht unter R) von der Linie UW berechnet, so sind dieselben 4,94 M. resp. 5,37 M.; darnach liegt Q_2 0,21 M. tiefer wie Q_1, R_2 0,37 M. höher wie R_1. Denken wir uns den Bahnkörper weg, so geht die Gerade BC_1 mehr durch die Luft wie durch die Erde, dasselbe gilt von allen Geraden, die von B aus nach der Kante C_1H gedacht werden; dann muss aber der Inhalt des qu. Körpers als Pyramide berechnet, kleiner sein, wie er es in Wirklichkeit ist.

Sehr annähernd richtig werden wir den Inhalt des Körpers berechnen, wenn wir die Grundbreiten QT und RS ermitteln, in der Art, dass wir den Punkt T in der durch BQ_1 und P_1Q_1 bestimmten Ebene liegend denken, den Punkt S, wie es wirklich stattfindet, in der Ebene lfg, dann den Inhalt der drei Theilkörper mit den Grundflächen BQT, $QTSR$ (die aus zwei Ebenen bestehende Fläche wird hierbei als windschiefe Fläche angesehen) und $RSHC_1$ berechnen, und die Werthe für diese 3 Inhalte summiren.

Der Inhalt des rechtsseitigen pyramidenförmigen Körpers ist darnach:

$$\frac{(4{,}73 - 4{,}20)\,0{,}83}{2} \cdot \frac{5{,}68}{3} = \ldots\ldots\ldots\ldots 0{,}42 \text{ Cubkm.}$$

$$\frac{3{,}32}{12}\Big[[(4{,}73-4{,}20)2+(5{,}74-4{,}20)]0{,}83+[(4{,}73-4{,}20) + 2\,(5{,}74-4{,}20)]\,1{,}72\Big] = 2{,}31 \quad \text{„}$$

$$\frac{11}{12}\Big[[(5{,}74-4{,}20)\,2+(6{,}8-4{,}2)]\,1{,}72+[(5{,}74-4{,}20) + (6{,}8-4{,}2)\,2]\,2{,}90\Big] = 26{,}87 \quad \text{„}$$

Sa. 29,60 Cubkm.

Als Pyramide berechnet, beträgt der Inhalt desselben Körpers: $\frac{(2{,}9 \cdot 2{,}6)}{2} \cdot \frac{20{,}0}{3} = 25{,}13$ Cubkm., daher wie oben vorausgesetzt wurde, weniger. Relativ ist der

Translatus 29,60 Cubkm.

Unterschied hier nicht unbedeutend. Der Inhalt des linksseitigen pyramidenförmigen Körpers ist:

$$\frac{2{,}56 \cdot 1{,}18}{2} \cdot \frac{20{,}0}{3} = 10{,}07 \text{ „}$$

die beiden pyramidenförmigen Körper zusammen 39,67 Cubkm.

Werden diese Körper mit dem Mittelkörper zusammen, nach Methode 3. berechnet, so ist der auf sie entfallende Theil des Inhaltes

$$\frac{(2{,}56 \cdot 1{,}18 + 2{,}9 \cdot 2{,}6)}{2} \cdot \frac{20{,}0}{2} = 52{,}80 \text{ Cubkm.}$$

Den vorstehenden Berechnungen zufolge ist der Inhalt des ganzen Eisenbahnkörper-Abschnittes

Erstens nach fast mathematisch richtiger Berechnungsweise =

1792,32 + 39,67 = 1831,99 Cubkm.

Zweitens nach der Methode 3. =

1827,90 + 52,80 = 1880,70 „

Fehler = + 48,71 Cubkm.

also = rtd. + 2,7 %.

Für dasselbe Beispiel den Inhalt nach Methode 4. berechnet, giebt 2233,45 Cubkm.

Fehler = 2233,45 − 1831,99 = + 401,46 Cubkm.,

also = rtd. + 22 %.

Nach Methode 5. berechnet, giebt dieses Beispiel 1841,76 Cubkm.

Fehler = 1841,76 − 1831,99 = 9,77 Cubkm.,

also = rtd. + 0,5 %.

Dass die letztere Methode nicht in allen Fällen ein günstiges Resultat giebt, ist in § 26. dargethan worden.

Nun wollen wir das Beispiel in Fig. 23 insoweit modificiren, dass die Verbindungslinien der correspondirenden Profilpunkte parallel zur Bahnachse werden, um dann nach der Methode 1a. die Inhalts-Berechnung ausführen zu können. Der Bahnkörper-Abschnitt in Fig. 35 wird in dieser Weise für jenen in Fig. 23 substituirt.

Bei 3,96 M. Höhe ist die Profilfläche I. über der Horizontalen =

59,16 □M.

Dazu $\frac{(1{,}65 + 0{,}95)}{2}$	2,91	=	3,783 □M.	
$\frac{(0{,}95 + 0{,}3)}{2}$	5,0	=	3,125 „	
Latus		=	6,908 □M.	59,16 □M.

Transport	=	6,908 □M.	59,16 □M.
$\frac{0,3 \cdot 5,0}{2}$	=	0,750 „	
$\frac{10,44 \cdot 0,24}{2}$	=	1,253 „	
	∥.	8,911 □M.	
davon ab $\frac{2,47 \cdot 1,65}{2}$	=	2,038 „	
		bleibt	6,87 „
		zusammen Profil I. =	66,03 □M.

Bei 5,60 M. Höhe ist die Profilfläche II. über der Horizontalen = ... 97,44 □M.

dazu $\frac{(1,71 + 0,60)}{2}$	5,47	=	6,318 □M.	
$\frac{(0,60 + 1,70)}{2}$	5,0	=	5,750 „	
$\frac{1,70 \cdot 5,0}{2}$		=	4,250 „	
$\frac{10,0 \cdot 1,27}{2}$		=	6,350 „	
$\frac{(1,27 + 0,53)}{2}$	3,7	=	3,330 „	
		∥.	25,998 „	

davon ab:

$\frac{1,71 \cdot 2,57}{2}$	=	2,197 □M.
$\frac{0,8 \cdot 0,53}{2}$	=	0,212 „
∥.	=	2,409 „
	bleibt	23,59 „
	zusammen Profil II. =	121,03 □M.

davon ab die beiden Grundflächen der seitlichen Pyramiden $\frac{2,56 \cdot 1,18 + 2,9 \cdot 2,6}{2}$ = ... 5,28 „

bleibt 115,75 □M.

Darnach beträgt der Inhalt des Mittelkörpers

$\frac{(66,03 + 115,75)}{2}$ 20,0 = ... 1817,8 Cubkm.

dazu der Inhalt der beiden seitlichen Pyramiden

$\frac{(2,56 \cdot 1,18 + 2,9 \cdot 2,6)}{2} \frac{20,0}{3}$ = . . . 35,2 „

Inhalt des Bahnkörper-Abschnittes Fig. 35 = 1853,0 Cubkm.

Differenz gegen das Resultat bei der fast mathematisch richtigen

Berechnungsweise nach Fig. 23 = 1853,0 — 1831,99 = + 21,01 Cubkm.,
oder = rtd. + 1,1 %.

Bei der Aufnahmeweise der Querprofile wie in Fig. 23, wo die Parallelität der Verbindungslinien der correspondirenden Punkte in den zusammengehörigen Profilen mit der Bahnachse, nicht stattfindet, kann die Configuration der Terrainfläche genauer zur Darstellung gebracht werden, wie bei der Aufnahmeweise, bei welcher die Parallelität jener Verbindungslinie zu der Bahnachse, und daher auch unter sich, Bedingung ist. Jene genauere Aufnahmeweise kommt aber bei der praktischen Erdmassen-Berechnung insofern nicht zur Geltung, als die mathematischen Berechnungs-Arbeiten, welche sie erfordert, wie wir bei unserem Beispiele gesehen haben, zu umständlich und zeitraubend für die Praxis sind, bei Anwendung einer practicabelen Methode aber die Verbindungslinien der Punkte des einen Profils mit den correspondirenden Punkten des andern Profils, wie wir § 24a. gezeigt haben, nothwendigerweise parallel mit der Bahnachse und unter sich, gedacht werden müssen, und dann diese Linien mit den durch die Aufnahme bestimmten Flächen in seltenen Fällen theilweise zusammenfallen, meistens in ihrer Gesammtheit eine von der wirklichen Grundfläche resp. Oberfläche (beim Abtrag) abweichende ideelle Grund- resp. Oberfläche bilden. Das theilweise Zusammenfallen findet nur dann statt, wenn eine oder mehrere der aufgenommenen Theilflächen Ebenen sind, und ihre Begrenzungslinien in den beiden Profilen derart einander gegenüberliegen, dass von der einen Begrenzungslinie aus zur Bahnachse parallel gedachte Linien, die andere Begrenzungslinie erreichen. Wie unser Beispiel zeigt, kommen diese Abweichungen der ideellen von der realen Grund- resp. Oberfläche nicht immer in nachtheiligster Weise zur Geltung, wenn nämlich die positiven und negativen Abweichungen sich grösstentheils compensiren, was aber doch nur als günstiger Zufall anzusehen ist.

Der wesentliche Vorzug der andern Methode, bei welcher durch die Aufnahme die qu. Verbindungslinien parallel zur Achse werden, besteht darin, dass hierbei die nothwendigen Abgleichungen allein bei der Feldarbeit stattfinden, dem Material, wie es im Felde gewonnen ist, bei der Stubenarbeit nicht Zwang angethan wird, sondern dasselbe nach Methode 1. in fast mathematisch richtiger Weise zur Inhalts-Berechnung verwendet wird. Der geübte Geometer kann bei dieser Aufnahmeweise beurtheilen, ob jene Verbindungslinien zu wenig mit der Terrainfläche zusammenfallen, ob die einzelnen Flächen zu windschief werden (wodurch Weiterungen bei der richtigen Berechnung des Inhaltes der seitlichen Pyramiden entstehen würden, siehe § 24b),

und wird diesen Erwägungen Rechnung tragend, die Profilebenen in angemessenen Abständen legen. Wo überhaupt Querprofile nothwendig sind, wird man dieselben selten mehr wie 20 M. von einander legen können, die Profilpunkte von einander ebensoweit zu wählen, wird in vielen Fällen ebensowohl bezüglich der Richtigkeit der Erdmassen-Berechnung, wie der Erleichterung der Arbeit, raisonnabel sein. Der Geometer hat bei der Querprofil-Aufnahme, Behufs Berechnung des Erdmassen-Inhaltes, stets im Auge zu behalten, dass diese Arbeit ihre Pointe nicht darin haben soll, auf eine minutiöse Weise die Schnittlinie der Querprofilebenen mit dem Terrain, zu ermitteln, sondern darin, ein geeignetes Material zu schaffen, um Körper combiniren zu können, deren Inhalt sich auf leichte Weise berechnen lässt, und deren Gesammtinhalt dem Inhalt des Bahnkörpers möglichst gleichkommt. (Ueber die Abweichung hiervon siehe die Anmerkung am Schlusse dieses §.)

Für Anfänger ist hierbei zu erwähnen, dass, wenn ein Querprofils-Punkt in eine Erhebung oder Vertiefung von unbedeutender Grundfläche fällt, sei es ein kleiner Hügel oder ein unbedeutender Feldgraben etc., das Niveau für qu. Punkt so angenommen werden muss, dass das Zusammenfallen der bezüglichen Profillinie mit dem Terrain durch jene kleine Unterbrechung der herrschenden Terrain-Gestaltung, möglichst unbeeinflusst bleibt.

Durch jeden Brechpunkt des Längen-Nivellements (natürlich von den gewöhnlichen Gräben abgesehen) ist eine Querprofilebene zu legen, insoweit wie überhaupt die Aufnahme von Querprofilen wegen starken Quergefälles (siehe § 14—19.) nothwendig ist. Hierbei ist noch zu berücksichtigen, dass zuweilen, namentlich an Stellen, wo hohe Aufträge resp. tiefe Einschnitte vorauszusetzen sind, innerhalb der ganzen Breite des zum Bahnkörper zu präsumierenden Terrains eine solche Gleichartigkeit der Terraingestaltung in der Richtung parallel zur Bahnachse, nicht stattfinden wird, dass die Brechpunkte des Terrains in der Bahnachse, allein maassgebend für die Anzahl der Querprofilebenen sind, sondern es werden eventuell noch Ebenen hinzutreten müssen. Die betreffenden Schnittpunkte in der Bahnachse müssen selbstverständlich an das Längen-Nivellement angeschlossen werden.

Curven-Anfang und Curven-Ende müssen, sofern dort Querprofile nöthig sind, beim Längen-Nivellement eingewogen sein (siehe § 30.). In den Brechpunkten der Gradiente sind ebenfalls für die Erdmassen-Berechnung Querprofile nöthig, dieselben werden aber durch Proportions-Rechnung aus den correspondirenden Punkten der aufgenommenen Querprofile, zwischen denen die Brechpunkte liegen, ermittelt.

Anmerkung. In Bezug auf die Aufnahme der Querprofile ist noch zu erwähnen, dass in dem Falle die Parallelität der Verbindungslinien der entsprechenden Querprofilspunkte in den zusammengehörigen Profilen, mit der Bahnachse, ausser Acht gelassen und die möglichst genaue Ermittelung der Schnittlinien der Querprofilebenen mit der Terrainfläche, angestrebt werden muss, wenn die Bahnlinie durch künstliche Anlagen geführt werden soll; namentlich in Städten, und es sich darum handelt, die etwaigen Futtermauern, abgepflasterte Dossirungen, Ortsveränderung von Baulichkeiten etc. projectiren, eventuell die Linie auf Grund der Situations- und Querprofil-Aufnahmen den vorhandenen künstlichen Anlagen etc. Rechnung tragend, verschieben zu können. Die bei dieser Aufnahmeweise nach dem Früheren entstehende Beeinträchtigung der Richtigkeit der Erdmassen-Berechnung kann man dann dadurch möglichst paralysiren, dass man die Querprofile in sehr kleinen Abständen von einander, aufnimmt. Der Fehler, dass die seitlichen Pyramiden mit den Mittelkörpern zusammen gemittelt werden (§ 24b), ist auch hier zu vermeiden.

§ 29.

Inhalts-Berechnung auf Grund schräge zur Bahnachse aufgenommener Querprofile, nebst Schema für die rationelle Inhalts-Berechnung des Bahnkörpers überhaupt, wenn das Quergefälle zu berücksichtigen ist.

Die Darstellung des Bahnkörpers im Grundriss ermöglicht, dass ausnahmsweise Querprofile auch in schräger Richtung zur Bahnachse, angewendet werden können, wenn dadurch die Richtigkeit der Inhalts-Berechnung gefördert und die Arbeit erleichtert wird.

Solcher Fall tritt ein beim Auftrag, wenn eine Schlucht schräge vom Bahnkörper durchschnitten wird, beim Abtrage, wenn dasselbe in Bezug auf einen Wall stattfindet. In Fig. 36 sind ausser der Mittellinie die Parallel-Linien zu derselben AB, CD und EF stationirt und nivellirt. Die einzelnen Terrainflächen-Abschnitte sind annähernd Ebenen, so dass man in beliebigen Richtungen gerade Linien denken kann, die mit jenen Flächen nahezu zusammenfallen. Das Planum steigt im Verhältniss 1 : 100, also auf den Meter 0,01 M. von G nach H. Die Terrain-Ordinaten (Höhen über dem Normalhorizont) sind eingeklammert und schwarz geschrieben, die Planums-Ordinate für denselben Punkt steht roth (hier schwarz) darüber, das Entfernungs-Maass von der auf der Bahnachse im Stationspunkte G normalen Profilebene steht schwarz unter jenen Zahlen, die Auftragshöhenmaasse sind roth (hier schwarz) geschrieben und haben das Vorzeichen +. Die Figur ist im Maassstabe 1 : 575 aufgetragen, und es können die Entfernungs-Maasse, welche zu der Construction und Inhalts-Berechnung des Bahnkörpers dienen, ziemlich genau abgegriffen werden; jedoch empfiehlt es sich in einem Fall, wie der in dem gegebenen Beispiel, wo so viele Zahlen einzuschreiben sind, den Maassstab 1 : 250 in der Praxis anzuwenden.

Die Ermittelung der Eckpunkte *K*, *M*, *O* u. s. w. ist insofern abweichend von den früheren Ermittelungen der Eckpunkte, als es sich hier um Profilebenen handelt, die schräge zur Bahnachse sind, und in denen daher das Neigungsverhältniss der Böschungsfläche des Bahnkörpers nicht ein constantes $1 : 1\frac{1}{2}$, sondern ein variabeles ist. Es sind hierbei 4 Fälle zu unterscheiden, der erste wie bei Punkt *K*, wo es sich um eine schräge Profilebene *PS* handelt; der zweite wie bei Punkt *a*, wo es sich um zwei schräge Profilebenen *ZT* und *TY* handelt; der dritte bei Punkt *f*, welcher Punkt der Schnittpunkt ist einer in bestimmter Tiefe unter der steigenden Planumskante und zu dieser parallel, in der Böschungsfläche liegenden Linie mit einer gegensteigenden Terrainflächen-Kante, deren Horizontalprojection zu der Horizontalprojection der Planumskante ebenfalls parallel ist; der vierte Fall, bei Punkt *g*, wo dieselben Momente wie bei *f*, nur dass die Terrainflächen-Kante in derselben Richtung wie die Planums-Kante ansteigt.

Denken wir uns einen Böschungskörper auf horizontaler Grundfläche, dessen obere Kante die Linie *PH* und dessen Auslauf die Linie *UB* ist, dessen Grundfläche also 20,0 M. breit ist, so muss, $1\frac{1}{2}$füssige Böschung vorausgesetzt, die Höhe des Böschungskörpers $= \frac{2}{3} \cdot 20{,}0 =$ 13,33 . . . M. sein, bei dem normalen Querschnitt *UP* würden Grundbreite und Höhe des Böschungskörpers sich also verhalten wie 20,0 : 13,33 oder wie $1 : \frac{13{,}33}{20{,}0}$; bei dem schrägen Querschnitt *PS* ist bei derselben Höhe 13,33 M., die Grundbreite = 20,7 M., das Verhältniss zwischen Grundbreite und Höhe ist hier 20,7 : 13,33 oder $1 : \frac{13{,}33}{20{,}7}$.

Das Neigungsverhältniss für den normalen Querschnitt verhält sich zu dem Neigungsverhältniss jenes schrägen Querschnittes wie $\frac{13{,}33}{20{,}0} : \frac{13{,}33}{20{,}7}$, oder wie $\frac{1}{20{,}0} : \frac{1}{20{,}7}$, oder wie 20,7 : 20,0, wenn man die Grundbreite als Einheit annimmt (bei der Bezeichnung $1\frac{1}{2}$füssige Böschung ist die Höhe als Einheit angenommen).

Hat der Böschungskörper bei sonst gleichen Bedingungen die Linie *IW* anstatt der Linie *PH* zur obern Kante, so bleibt das Neigungsverhältniss für den schrägen Querschnitt dasselbe wie vorher (dass dies bei dem normalen Querschnitt stattfindet, ist selbstverständlich); denn das Neigungsverhältniss von dem normalen Querschnitt verhält sich zu dem Neigungsverhältniss des schrägen Querschnittes zunächst umgekehrt wie *VI* : *SI*, da aber *VI* : *SI* = *UP* : *SP*, so ist das Verhältniss wie bei dem ersteren Böschungskörper wie bei *UP* und *SP*. Für die Böschungsfläche, deren obere Kante durch *I* geht, ist bei der

schrägen Querschnittsfläche, die Grundbreite als Einheit angenommen, das Böschungsverhältniss nach dem Vorstehenden $= \frac{13,33}{20,7}$.

In der schrägen Profilebene ist aber das Fallen des Terrains von P bis $S = 40,88 - 40,15 = 0,73$ M. auf 20,7 M. Länge, das Neigungsverhältniss des Terrains ist daher für jene Profilebene $= \frac{0,73}{20,7}$. Die Höhe des Bahnkörpers im Punkte I ist $= 2,36$; nennen wir die Grundbreite IK x, so ist:

$$\left(\frac{13,33}{20,7} - \frac{0,73}{20,7}\right) x = 2,36$$

$$\frac{(13,33 - 0,73)}{20,7} x = 2,36$$

$$x = 3,9 \text{ M.}$$

Der zweite Fall in Bezug auf Punkt a ist wie folgt zu lösen:

Aus den bezüglichen Maasszahlen ist ersichtlich, dass die Böschungsfläche über den Punkt T hinaus gehen wird; es ist daher zunächst die Höhe zu ermitteln, welche jene über dem Punkt T_1 der Terrainfläche haben wird. T liegt 21,0 M. von Profil AE; bei dieser Entfernung ist die Ordinate des Punktes q als Projection des Punktes T auf der Planumskante 43,29; der Grundbreite $qT = 7,7$ M. entspricht eine Höhe des Böschungskörpers von $\frac{2}{3} \cdot 7,7 = 5,13$ M., die Ordinate des über dem Punkte T_1 der Terrainfläche liegenden Punktes T der Böschungsfläche beträgt daher $43,29 - 5,13 = 38,16$ M., und es liegt dieser Punkt $38,16 - 32,82 = 5,34$ M. über T_1.

Jetzt ist der Punkt a zu ermitteln, wo die Böschungslinie die Linie T_1Y schneidet. Das Neigungsverhältniss der Böschungslinie ist in der bezüglichen Ebene $= \frac{\frac{2}{3} \cdot 8}{8,9} = \frac{5,33}{8,9}$, das Neigungsverhältniss der ansteigenden Terrainfläche ist in derselben Schnittebene $\frac{1,15}{8,9}$. Für $T_1a = x$ ist:

$$\frac{(5,33 + 1,15)}{8,9} x = 5,34$$

$$x = 7,33 \text{ M.}$$

Der dritte Fall, die Feststellung des Punktes f:

Die von dem in der Böschungsfläche liegenden Punkte T ausgehende Parallele zur obern Böschungskante hat wie diese das Neigungsverhältniss 0,01, die darunter liegende Terrainflächen-Kante T_1Q steigt von T_1 nach Q in dem Verhältniss $\frac{9,01}{10,4}$. Der Punkt T liegt, wie oben berechnet worden, 5,34 M. über dem Terrain.

Wird Tf x genannt, so ist

$$\left(0{,}01 + \frac{9{,}01}{10{,}4}\right) x = 5{,}34$$
$$x = 6{,}1 \text{ M.}$$

Der vierte Fall, die Feststellung des Punktes g:

h auf der Böschung liegt 5,10 M. über h_1 der Terrainfläche, das Neigungsverhältniss der Terrainflächenkante $h_1 i$ ist $= \frac{9{,}33}{15{,}7}$, das Planum ist in der Richtung von h nach g ansteigend; wird nun hg x genannt, so gilt die Gleichung

$$\left(\frac{9{,}33}{15{,}7} - 0{,}01\right) x = 5{,}10$$
$$x = 8{,}7 \text{ M.}$$

Bei der Inhalts-Berechnung wird man sich zur Erleichterung der Arbeit kleine Licenzen gestatten, z. B. die Linie IK ist sehr annähernd parallel LM, MO ist sehr annähernd parallel LN, ad ist annähernd parallel Th und man kann unbedenklich bei der Inhalts-Berechnung die beziehungsweise Parallelität jener Linien annehmen. Ebenso kann man den Inhalt der Körper zwischen der Mittellinie GH und der Linie kW mit Rücksicht darauf, dass diese Körper sehr schmal und ihre Grundflächen nahezu Parallelogramme sind, anstatt nach Formel 16., nach Formel 13., in der Art, dass für den Werth e in dieser Formel das arithmetische Mittel aus den beiden parallelen Seiten des Grundrisses, und für den Werth g der normale Abstand dieser Seiten von einander $= 0{,}7$ M. angenommen wird, berechnen.

Die Inhalts-Berechnung ist in solcher Form aufzustellen, dass Behufs der Revision eine leichte Orientirung in Bezug auf die Lage der Theilkörper erreicht wird, und die gewonnenen Resultate sich bequem bei der Disposition der Erdmassen verwerthen lassen. In dem gegebenen Beispiele sind 5 Bahnkörper-Abschnitte zu unterscheiden, der erste von St. 0 bis St. 0,137, der zweite von St. 0,137 bis St. 0,287, der dritte von St. 0,287 bis St. 0,554, der vierte von St. 0,554 bis St. 0,727, der fünfte von St. 0,727 bis St. 1. Bei den Theilkörpern ist durch die Buchstaben l. resp. r. zu bezeichnen, ob der einzelne Theilkörper links oder rechts von der Mittellinie liegt. Nachstehendes Schema, in welchem wir die Inhalts-Berechnung des gegebenen Beispiels ausführen wollen, dürfte den Anforderungen entsprechen.

Lage der Theilkörper: Linksseitig (l.) resp. rechtsseitig (r.) von der Mittellinie.	zwischen Station	und Station.	Aufstellung der Inhalts-Berechnung der Theilkörper.	Auftrag: in den Theilkörpern Cbkm.	Auftrag: in dem Bahnkörper-Abschnitt. Cbkm.	Grabenerde in dem Bahnkörper-Abschnitt. Cbkm.	Abtrag in den Theilkörpern. Cbkm.	Abtrag und Grabenerde in dem Bahnkörper-Abschnitt. Cbkm.
l.	0	0,137	$\frac{14,9 \cdot 0,7}{2} \cdot \frac{0,43}{3} =$	0,75	281,64	—	—	—
„	„	„	$\left[(2 \cdot 0,43 + 2,36 + 2,81)\ 14,9 + (0,43 + 2 \cdot 2,36 + 2 \cdot 2,81)\ 14,1\right] \frac{3,8}{12} =$	76,54		—	—	—
„	„	„	$\frac{(2,81 + 2,78 + 2,34 + 2,36)}{4} \frac{(14,1 + 13,7)}{2} 0,7 =$	25,03		—	—	—
r.	„	„	$\left[(2 \cdot 2,78 + 2 \cdot 2,34 + 2,00 + 2,50)\ 13,7 + (2,78 + 2,34 + 2 \cdot 2,00 + 2 \cdot 2,50)\ 12,6\right] \frac{4,3}{12} =$	136,11		—	—	—
„	„	„	$\left[(2 \cdot 2,50 + 2 \cdot 2,00 + 0,44)\ 12,6 + (2,50 + 2,00 + 2 \cdot 0,44)\ 11,9\right] \frac{2,8}{12} =$	42,69		—	—	—
„	„	„	$\frac{11,9 \cdot 0,6}{2} \cdot \frac{0,44}{3} =$	0,52		—	—	—
l.	0,137	0,287	$\left[(2 \cdot 2,36 + 10,89)\ 3,9 + (2,36 + 2 \cdot 10,89)\ 21,3\right] \frac{14,0}{12} =$	670,90		—	—	—
„	„	„	$\frac{(2,36 + 2,34 + 10,85 + 10,89)}{4} \frac{(14,8 + 15,0)}{2} 0,7 =$	68,94		—	—	—
r.	„	„	$\left[(2 \cdot 2,34 + 2 \cdot 10,85 + 10,71 + 2,00)\ 15,0 + (2,34 + 10,85 + 2 \cdot 10,71 + 2 \cdot 2,00)\ 13,3\right] \frac{4,3}{12} =$	394,12		—	—	—
„	„	„	$\left[(2 \cdot 2,00 + 2 \cdot 10,71 + 8,73)\ 13,3 + (2,00 + 10,71 + 2 \cdot 8,73)\ 12,2\right] \frac{2,8}{12} =$	191,86		—	—	—
			$\left[(2 \cdot 8,73 + 5,34)\ 12,2 + (8,73 + 2 \cdot 5,34)\ 6,1\right] \frac{4,9}{12} =$	161,93		—	—	—

Lage der Theilkörper: Linksseitig (l.) resp. rechtsseitig (r.) von der Mittellinie.	zwischen Station	und Station.	Aufstellung der Inhalts-Berechnung der Theilkörper.	Auftrag: in den Theilkörpern Cbkm.	Auftrag: in dem Bahnkörper-Abschnitt. Cbkm.	Grabenerde in dem Bahnkörper-Abschnitt. Cbkm.	Abtrag in den Theilkörpern. Cbkm.	Abtrag und Grabenerde in dem Bahnkörper-Abschnitt. Cbkm.
„	„	„	$\frac{6{,}1 \cdot 6{,}6}{2} \cdot \frac{5{,}34}{3} =$	35,83	1523,58	—	—	—
l.	0,287	0,554	$\left[(10{,}63 + 10{,}89)\ 35{,}8 + (2 \cdot 10{,}63 + 2 \cdot 10{,}89)\ 27{,}5\right] \frac{17{,}8}{12} =$	2898,46		—	—	—
„	„	„	$\frac{(10{,}89 + 10{,}85 + 10{,}57 + 10{,}63)}{4} \cdot \frac{(27{,}5 + 26{,}7)}{2} 0{,}7 =$	203,64		—	—	—
r.	„	„	$\left[(2 \cdot 10{,}85 + 2 \cdot 10{,}57 + 10{,}45 + 10{,}71)\ 26{,}7 + (10{,}85 + 10{,}57 + 2 \cdot 10{,}45 + 2 \cdot 10{,}71)\ 27{,}2\right] \frac{4{,}3}{12} =$	1233,57	6492,80	—	—	—
„	„	„	$\left[(2 \cdot 10{,}71 + 2 \cdot 10{,}45 + 5{,}10 + 5{,}34)\ 27{,}2 + (10{,}71 + 10{,}45 + 2 \cdot 5{,}10 + 2 \cdot 5{,}34)\ 28{,}0\right] \frac{7{,}7}{12} =$	1676,16		—	—	—
„	„	„	$\left[(2 \cdot 5{,}34 + 2 \cdot 5{,}10)\ 28{,}0 + (5{,}34 + 5{,}10)\ 25{,}3\right] \frac{(7{,}0 + 6{,}6)}{2 \cdot 12} =$	480,97		—	—	—
l.	0,554	0,727	$\frac{18{,}6\ ,\ 13{,}9}{2} \cdot \frac{8{,}41}{3} =$	362,39		—	—	—
„	„	„	$\left[(2 \cdot 8{,}41 + 2{,}24 + 10{,}63)\ 18{,}6 + (8{,}41 + 2 \cdot 2{,}24 + 2 \cdot 10{,}63)\ 17{,}5\right] \frac{3{,}5}{12} =$	335,38		—	—	—

„	„	„	$\frac{(10{,}63 + 1057 + 2{,}19 + 2{,}24)}{4} \frac{(17{,}5 + 17{,}3)}{2} 0{,}7 =$	78,04	1737,80	—	—	—
r.	„	„	$\frac{(10{,}57 + 2{,}19 + 1{,}80 + 10{,}45)}{4} \frac{(17{,}3 + 17{,}0)}{2} 4{,}3 =$	461,09		—	—	—
„	„	„	$\frac{(10{,}45 + 8{,}77 + 1{,}80)}{4} \frac{(17{,}0 + 16{,}5)}{2} 2{,}4 =$	211,25		—	—	—
„	„	„	$\left[(2 \cdot 8{,}77 + 5{,}10)\ 16{,}5 + (8{,}77 + 2 \cdot 5{,}10)\ 8{,}7\right] \frac{5{,}3}{12} =$	237,88		—	—	—
„	„	„	$\frac{8{,}7 \cdot 7{,}0}{2} \cdot \frac{5{,}10}{3} =$	51,77		—	—	—
l.	0,727	1	$\frac{3{,}5 \cdot 4{,}1}{2} \frac{(2{,}15 + 2{,}24)}{3} =$	10,50		—	—	—
„	„	„	$\left[(2 \cdot 2{,}15 + 1{,}66)\ 3{,}5 + (2{,}15 + 2 \cdot 1{,}66)\ 2{,}9\right] \frac{22{,}0}{12} =$	67,32		—	—	—
„	„	„	$\frac{2{,}24 + 2{,}19 + 1{,}60 + 1{,}66}{4} \frac{(26{,}1 + 27{,}3)}{2} 0{,}7 =$	35,93	375,04	—	—	—
r.	„	„	$\left[(2 \cdot 2{,}19 + 2 \cdot 1{,}60 + 1{,}32 + 1{,}80)\ 27{,}3 + (2{,}19 + 1{,}60 + 2 \cdot 1{,}32 + 2 \cdot 1{,}80)\ 29{,}9\right] \frac{4{,}3}{12} =$	212,14		—	—	—
„	„	„	$\frac{2{,}3 \cdot 1{,}5}{2} \cdot \frac{1{,}80}{3} =$	1,04		—	—	—
„	„	„	$\left[(2 \cdot 1{,}80 + 1{,}32)\ 2{,}3 + (1{,}80 + 2 \cdot 1{,}32)\ 1{,}8\right] \frac{29{,}9}{12} =$	48,11		—	—	—
			Summa =	10410,86	10410,86	—	—	—

Bemerkung. Dieses Schema ist in derselben Form bei der rationellen Erdmassen-Berechnung mit Zugrundelegung von Querprofilen, deren Ebenen rechtwinklig zur Achse des Bahnkörpers liegen, zu verwenden. Die Aufstellung für die Gräben des Abtrages ist dann, wenn an beiden Seiten der Mittellinie Abtrag ist, auf derselben Zeile zu machen, und in der ersten Colonne l. und r. zu schreiben. In der Colonne für die Aufstellung ist bei diesen Gräben gleich der Querschnitt selbst in Berechnung zu bringen. Ist für den Abtragsgraben der Querschnitt z. B. = 0,75 □M., und die Entfernung der Querprofile von einander = 30 M., so würde für die beiderseitigen Abtragsgräben aufzustellen sein: 0,75 □M. × 30,0 · 2. Die Werthe aus den beiden Colonnen für die Bahnkörper-Abschnitte sind in die Tabelle für die Disposition über die Erdmassen, zu übertragen (siehe den Schluss der Bemerkung bei dem Schema für Haupt-Abschnitt A.).

§ 30.

Inhalts-Berechnung des Bahnkörpers in Curven (dazu Fig. 37).

Die Construction des Körpers im Grundriss, sowie die Inhalts-Berechnung selbst gründet sich auf § 22.

Die Fig. 37 entspricht, soweit die Curve nicht von Einfluss ist, der Fig. 31, und wollen wir sehen, wie sich bei einem Radius von 300 M. der Inhalt im Vergleich zu dem bei der geraden Linie in Fig. 31 herausstellt. Die Fig. 37c ist in Bezug auf den Radius karrikirt gezeichnet.

Die Linie AD wird berechnet: $300 : 306{,}8 = 20 : x$

$$AD = 20{,}45 \text{ M.}$$

analog werden die Linien PO, QR und FI berechnet.

Die Curven-Linien AC und FH des Auslaufes der Böschungen dienen zwar nicht zur Inhalts-Berechnung, um sie mit Hülfe eines Curven-Lineals richtig zeichnen zu können, müssen aber, wenn man einen Werth auch auf die correcte Zeichnung des Grundrisses legt, die Punkte B und G der Mitten jener Linien ermittelt werden.

Nennen wir BN x, so ist

$$\tfrac{2}{3}\,x - \frac{6{,}89 - 4{,}31}{20{,}0}\,(x + 0{,}7) = 4{,}31$$

$$x = 8{,}18 \text{ M.}$$

Ist $LG = x$, so ist

$$\tfrac{2}{3}\,x + \frac{4{,}31 - 2{,}55}{20{,}0}\,(x + 4{,}3) = 4{,}31$$

$$x = 5{,}21 \text{ M.}$$

Der Inhalt ist

$$I = \frac{4{,}42 \cdot 2{,}24}{2} \cdot \frac{20{,}45}{3}$$

$$+ \left[(2 \cdot 2{,}24 + 5{,}33 + 3{,}47)\ 20{,}45 + (2{,}24 + 2 \cdot 5{,}33 + 2 \cdot 3{,}47)\ 20{,}05\right] \frac{6{,}1}{12}$$

$$+\left[(2\cdot 3{,}47+2\cdot 5{,}33+5{,}22+3{,}40)\ 20{,}05+(3{,}47+5{,}33+2\cdot 5{,}22+2\cdot 3{,}40)\ 20{,}0\right]\frac{0{,}7}{12}$$

$$+\left[(2\cdot 3{,}40+2\cdot 5{,}22+4{,}98+2{,}88)\ 20{,}0+(3{,}40+5{,}22+2\cdot 4{,}98+2\cdot 2{,}88)\ 19{,}71\right]\frac{4{,}3}{12}$$

$$+\left[(2\cdot 2{,}88+2\cdot 4{,}98+2{,}33)\ 19{,}71+(2{,}88+4{,}98+2\cdot 2{,}33)\ 19{,}47\right]\frac{3{,}66}{12}$$

$$+\frac{2{,}33\cdot 3{,}23}{2}\cdot\frac{19{,}47}{3}=33{,}75+340{,}26+61{,}05+351{,}79+182{,}856+24{,}42=994{,}13$$

Cubkm., und zwar kommen davon auf den Mittelkörper 935,96 Cubkm., auf die seitlichen Pyramiden 58,17 Cubkm.; der Inhalt des Mittelkörpers beträgt daher $938{,}49-935{,}96=2{,}53$ Cubkm. weniger wie bei Methode 1. für Fig. 31, der Inhalt der seitlichen Pyramiden bei Fig. 37 $58{,}17-58{,}09=0{,}08$ Cubkm. mehr wie bei Fig. 31. Der Mittelkörper hat bei Fig. 37 deshalb einen kleinern Inhalt, weil auf der rechten Seite von der Mittellinie, wo der grössere Theil des Erdkörpers liegt, die Profilebenen convergiren, auf der linken Seite von der Mittellinie, wo der kleinere Theil liegt, divergiren. Die seitlichen Pyramiden haben bei Fig. 37 einen etwas grösseren Inhalt, weil bei der linksseitigen Pyramide, die eine grössere Grundfläche hat wie die rechtsseitige Pyramide, die Länge eine grössere geworden ist wie bei Fig. 31, während bei der rechtsseitigen Pyramide die Länge fast in demselben Maasse kleiner geworden ist.

Die Anwendung der vorstehenden Berechnungsweise wird man, da sie umständlich und zeitraubend ist, auf die wenigen Fälle beschränken, wo bei sehr hohen Aufträgen resp. Abträgen (etwa von 10 M. ab) und starkem Quergefälle, die Curven kleine Radien (300 bis 800 M.) haben, und im Allgemeinen mit hinreichender Genauigkeit die Inhalts-Berechnung des Bahnkörpers in Curven ausführen, wie wir nachstehend an dem Beispiel in Fig. 37 zeigen wollen.

Wir setzen hierbei voraus, dass, namentlich bei kleinern Radien, die Abstände der Profile von einander, in der Mittellinie gemessen, nicht über 20 M. betragen, weil sonst die Divergenz und Convergenz der Profilebenen zu gross wird.

Von den bogenförmigen Abständen werden nur AD und FI ermittelt, der Inhalt des Mittelkörpers wird dann für die Länge $\frac{AD+FI}{2}$ entweder nach Methode 1. oder nach Methode 1a. berechnet, die Inhalts-Berechnung der seitlichen Pyramiden bleibt ungeändert.

Bei unserm Beispiel ist der Inhalt des Mittelkörpers dann nach Methode 1. =

$$\Big[(3{,}47 + 5{,}33 + 2{,}24)\ 6{,}10 + (3{,}47 + 3{,}40 + 5{,}22 + 5{,}33)\ 0{,}7$$
$$+ (3{,}40 + 2{,}88 + 4{,}98 + 5{,}22)\ 4{,}30 + (2{,}88 + 2{,}33 + 4{,}98)\ 3{,}66\Big] \frac{(20{,}45 + 19{,}47)}{2 \cdot 4}$$

$$= 936{,}61 \text{ Cubkm.}$$

die seitlichen Pyramiden:

$$\frac{4{,}42 \cdot 2{,}24}{2} \cdot \frac{20{,}45}{3} + \frac{2{,}33 \cdot 3{,}23}{2} \cdot \frac{19{,}47}{3} =$$

$$33{,}75 + 24{,}42 = 58{,}17 \text{ „}$$

Sa. 994,78 Cubkm.

Differenz gegen die vorhergehende Berechnung

$$994{,}78 - 994{,}13 = + 0{,}65 \text{ Cubkm.}$$

Nach Methode 1a. (siehe § 27.) ist der Inhalt

des Mittelkörpers: $\frac{(31{,}77 + 62{,}07)}{2} \frac{(20{,}45 + 19{,}47)}{2} =$ 936,52 Cubkm.

der seitlichen Pyramiden wie oben = 58,17 „

Sa. 994,69 Cubkm.

C.

Seitenentnahmen (Füllgruben).

§ 31.

Allgemeines über die Form der Seitenentnahmen und über die Art der nivellitischen Arbeiten Behufs Ermittelung des Inhaltes der ausgeschachteten Erdmassen.

Der Grundfläche der Seitenentnahmen giebt man eine solche Form, dass die von den Rändern jener bestimmten Grenzlinien den Adjacenten in wirthschaftlicher Beziehung nicht Veranlassung zu begründeten Beschwerden geben; was der Fall sein würde, wenn die Grenzlinien zu oft gebrochen sind, und spitze Winkel vorkommen etc. In vielen Fällen ist dem entsprechend die Grundform der Seitenentnahmen ein Rechteck, schliessen sich dieselben jedoch von 2 Seiten, oder von einer Seite an Besitzstands-Grenzen an, so wird jene Grundform event. ein Parallel-Trapez, ein unregelmässiges Viereck, oder auch ein Dreieck, wie die Fig. 38, 39 und 40 zeigen. Wird eine in der Nähe der Eisenbahnlinie liegende Bergkuppe abgetragen, wie es sich zuweilen der Bau-Ver-

waltung sowohl als auch dem Grundbesitzer vortheilhaft zeigt (da der Grundbesitzer in diesem Falle die geebnete Fläche meistens gerne in seinem Besitz behält), so wird die Grundform der Seitenentnahme eine durch eine unregelmässige krumme Linie begrenzte Figur.

Die nivellitische Arbeit Behufs Ermittelung des kubischen Inhaltes einer Ausschachtung von geringer Breite und bei nicht sehr coupirtem Terrain, beschränkt sich darauf, dass an den Rändern die Tiefen mit Anwendung der Setzwaage ermittelt werden; bei Ausschachtungen von grösserer Breite, sowie bei Bergabtragungen muss ein Nivellement der Terrainfläche vor dem Ausschachten resp. Abtragen ausgeführt werden. Bei Ausschachtungen lässt man auch Erdkegel steheu, um nach geschehener Ausschachtung die Tiefen darnach ermitteln zu können. Die Anwendung der Erdkegel ist aber bedenklich, weil durch geschicktes Einfügen eines Klotzes gewachsenen Bodens in solchen Erdkegel, derselbe derartig erhöht werden kann, dass besonders nach einem Regen, der Betrug schwer erweislich ist.

Wird dagegen auf der Terrainfläche, die zur Ausschachtung dienen soll, in etwas grösserer Ausdehnung wie die Ausschachtung die Terrainfläche in Anspruch nehmen wird, ein Netz-Nivellement ausgeführt, so kann durch die Wiederherstellung der Netzpunkte auf der ausgeschachteten Fläche und erneutes Nivellement jener Punkte, die sicherste und für die Berechnung zweckmässigste Ermittelung der Grundfläche und der Tiefen der Seitenentnahme statthaben. Bei Bergabtragungen ist ein vor der Abtragung ausgeführtes Netz-Nivellement bezüglich der Feststellung der Erdmassen unentbehrlich.

§ 32.

Inhalts-Bestimmung der Seitenentnahmen durch Querprofile.

Bevor wir auf das Netz-Nivellement näher eingehen, wollen wir die Methode, durch Querprofile den Inhalt der Seitenentnahme zu ermitteln, näher beleuchten.

Nehmen wir zunächst an, dass die Seitenentnahme Fig. 41 senkrechte Wände (AB, BC, CD und DA) hat.

Zur Berechnung des Inhaltes der ausgeschachteten Erdmasse seien der Grundriss und die Profile gegeben, deren Lage durch die Linien AD, EF, GH, IK und BC angegeben ist.

Bezeichnen wir den Flächen-Inhalt jener Profile mit resp. F_1, F_2, F_3, F_4 und F_5, so ist nach der gebräuchlichen Methode, der Inhalt der Seitenentnahme =

$$\frac{(F_1 + F_2)}{2} \cdot AE + \frac{(F_2 + F_3)}{2} EG + \frac{(F_3 + F_4)}{2} GI + \frac{(F_4 + F_5)}{2} IB.$$

Nach den früheren Auseinandersetzungen und Beweisführungen ist der Theil der Seitenentnahme, welcher die Dreiecke DOF, FNH, HMK und KLC zur Grundfläche hat, von dieser Berechnungsweise auszuschliessen, wenn nicht die Berechnung event. zu sehr unrichtigen Resultaten führen soll.

Zunächst ist aus der Figur ersichtlich, dass, wenn die Seitenentnahme anstatt durch 3 Profilebenen in 4 Theile getheilt zu sein, durch die eine Profilebene GH in nur 2 Theile zerlegt worden wäre, der Theil der Seitenentnahme, dessen Inhalt dann auf eine andere Weise wie durch Mitteln der Profile festgestellt werden muss, eine doppelt so grosse Grundfläche hat, wie in jenem Falle, dabei vorausgesetzt, dass $AE = EG = GI = IB$ ist; denn $\triangle DPH = 2\ (\triangle DOF + \triangle FNH)$ und

$$\triangle HQC = 2\ (\triangle HMK + \triangle KLC).$$

Aus dieser Betrachtung folgt im Allgemeinen, dass durch Vermehrung der Profile, der Fehler, welcher mit der Anwendung der empirischen Berechnungs-Methode principiell verbunden ist, herabgemindert wird.

Gehen wir nun auf qu. Fehler speciell ein. Nennen wir die Tiefen der Seitenentnahme bei D, O und F resp. h_1, h_2, h_3, nennen wir ferner $DO\ a$ und $OF\ b$, so ist nach mathematischer Berechnungsweise der Inhalt des Theiles der Seitenentnahme, dessen Grundfläche DOF ist, =

$$\frac{a \cdot b}{2} \cdot \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3} = \frac{a \cdot b}{2} \left(\frac{h_1}{3} + \frac{h_2 + h_3}{3} \right).$$

Bei der empirischen Berechnungsweise des uneingeschränkten Mittelns der Profile, kommt derselbe Körper wie folgt zur Berechnung:

$$\tfrac{1}{2} \left(0 + \frac{(h_2 + h_3)}{2} \cdot b \right) a = \frac{a \cdot b}{2} \frac{(h_2 + h_3)}{2}.$$

Die Vergleichung der Werthe bei den beiden Berechnungsweisen lehrt, dass, wenn $\frac{h_1}{3}$ grösser wie $\frac{h_2 + h_3}{2} - \frac{h_2 + h_3}{3}$,

$$\text{also } \frac{h_1}{3} > \tfrac{1}{6} (h_2 + h_3), \text{ oder}$$

$$h_1 > \frac{h_2 + h_3}{2} \text{ ist,}$$

bei der mathematischen Berechnungsweise der Inhalt des Körpers, dessen Grundfläche DOF ist, grösser gefunden wird wie bei der empirischen Berechnungsweise; in dem seltenen Falle, wenn zufällig $h_1 = \frac{h_2 + h_3}{2}$ ist, wird qu. Inhalt bei beiden Berechnungsweisen gleich gross gefunden, ist

$h_1 < \frac{h_2 + h_3}{2}$, so wird qu. Inhalt bei der mathematischen Berechnungsweise kleiner gefunden wie bei der empirischen.

Liegt die Seitenentnahme auf einem Bergabhange derartig, dass der Punkt D nach dem Gipfel, C nach dem Fusse des Berges zu liegt, so wird nicht allein bei dem Körper, dessen Grundfläche DOF ist, sondern auch bei den Körpern, deren Grundflächen FNH, HMK und KLC sind, der erstere Fall eintreten, findet umgekehrt in der Richtung von D nach C ein Steigen statt, so tritt der dritte Fall ein.

Führen wir für alle diese Fälle Beispiele an.

Es sei $a = 10{,}0$ M., $b = 4{,}8$ M.,

$h_1 = 6{,}0$ M., $h_2 = 3{,}5$ M., $h_3 = 4{,}0$ M.,

so ist der Inhalt des Körpers, dessen Grundfläche DOF ist, nach der ersten Berechnungsweise =

$$\frac{10{,}0 \cdot 4{,}8}{2} \frac{(6{,}0 + 3{,}5 + 4{,}0)}{3} = 108 \text{ Cubkm.},$$

nach der zweiten Berechnungsweise =

$$\frac{10{,}4 \cdot 4{,}8}{2} \frac{(3{,}5 + 4{,}0)}{2} = 90 \text{ Cubkm.}$$

$108 - 90 = 18$ Cubkm. negativer Fehler.

Um mit diesem Fehler den grösseren Fehler vergleichen zu können, welcher entsteht, wenn bei der empirischen Berechnungsweise die Profilebenen in doppelt so grossem Abstande angenommen sind, wie bei dem vorstehenden Beispiele, wollen wir annehmen, dass das Fallen in den Richtungen von D nach H und von D bis P ein stetiges ist; dann ist die Tiefe bei $P = 1{,}0$ M., bei $H = 2{,}0$ M., DP ist $= 20{,}0$ M.. $PH = 9{,}6$ M.

Der Körper, dessen Grundfläche DPH ist, ist nach der mathematischen Berechnungsweise =

$$\frac{20{,}0 \cdot 9{,}6}{2} \frac{(6{,}0 + 1{,}0 + 2{,}0)}{3} = 288 \text{ Cubkm.},$$

nach der empirischen Berechnungsweise

$$= \frac{20{,}0 \cdot 9{,}6}{2} \frac{(1{,}0 + 2{,}0)}{2} = 144 \text{ Cubkm.}$$

$288 - 144 = 144$ Cubkm. negativer Fehler.

Es ist nun noch nöthig den Inhalt des Körpers besonders zu berechnen, dessen Grundfläche FNH ist, die Tiefe bei N ist $= \frac{2{,}0 + 1{,}0}{2} =$ 1,5 M.; nach der ersten Berechnungsweise ist der Inhalt =

$$\frac{10{,}0 \cdot 4{,}8}{2} \frac{(4{,}0 + 1{,}5 + 2{,}0)}{3} = 60{,}0 \text{ Cubkm.},$$

nach der empirischen Berechnungsweise

$$= \frac{10{,}0 \cdot 4{,}8}{2} \frac{(1{,}5 + 2{,}0)}{2} = 42{,}0 \text{ Cubkm., daher}$$

$$60{,}0 - 42{,}0 = 18{,}0 \text{ Cubkm. negativer Fehler,}$$

(eben so gross wie bei dem Körper, dessen Grundfläche DOF ist).

Zu diesem Fehlerwerth den Fehlerwerth von dem Körper, dessen Grundfläche DOF ist, hinzugefügt, giebt

$$18{,}0 + 18{,}0 = 36{,}0 \text{ Cubkm.}$$

Diesem Fehlerwerth steht mit 144 Cubkm. der Fehlerwerth gegenüber, welchen wir bei der empirischen Berechnungsweise des Inhaltes von dem Körper, dessen Grundfläche DPH ist, gefunden haben. Diesen Zahlen nach ist dadurch, dass der Abstand der Profilebenen von einander, verdoppelt ist, der Fehlerwerth bei der empirischen Berechnungsweise ein vierfach grösserer geworden (siehe § 3.).

Es folge nun das Beispiel für den Fall, dass die empirische Berechnungsweise dasselbe Resultat giebt, wie die mathematische.

a sei wieder $= 10{,}0$ M., und b wieder $= 4{,}8$ M.,

h_1 sei $= 5{,}6$ M., $h_2 = 5{,}2$ M., $h_3 = 6{,}0$ M.,

dann ist der Inhalt des Körpers, dessen Grundfläche DOF ist, nach mathematischer Berechnungsweise

$$= \frac{10{,}0 \cdot 4{,}8}{2} \frac{(5{,}6 + 5{,}2 + 6{,}0)}{3} = 134{,}4 \text{ Cubkm.,}$$

nach empirischer Berechnungsweise

$$= \frac{10{,}0 \cdot 4{,}8}{2} \frac{(5{,}2 + 6{,}0)}{2} = 134{,}4 \text{ Cubkm.}$$

Endlich führen wir noch ein Beispiel an, für den Fall, dass die empirische Berechnungsweise ein grösseres Resultat giebt, wie die mathematische.

a und b haben dieselben Werthe wie oben, h_1 sei $= 4{,}0$ M., $h_2 = 6{,}5$ M. und $h_3 = 6{,}0$ M.;
der Inhalt des qu. Körpers ist dann nach der mathematischen Berechnungsweise $=$

$$\frac{10{,}0 \cdot 4{,}8}{2} \frac{(4{,}0 + 6{,}5 + 6{,}0)}{3} = 132{,}0 \text{ Cubikm.,}$$

nach der empirischen Berechnungsweise

$$= \frac{10{,}0 \cdot 4{,}8}{2} \frac{(6{,}5 + 6{,}0)}{2} = 150{,}0 \text{ Cubkm.,}$$

$$150{,}0 - 132{,}0 = 18{,}0 \text{ Cubkm. Fehler im positiven Sinne.}$$

Das letzte Beispiel ist so gewählt, dass es mit dem ersten Beispiele für den entgegengesetzten Fall, verglichen werden kann, die

Maasse sind nur insoweit geändert, als dieses die entgegengesetzte Neigung der Linien *DO* und *DF*, und der durch diese Linien bestimmten Ebene bedingt; der Fehlerwerth ist deshalb bei dem letzten Beispiele im positiven Sinne ebenso gross, wie er bei dem ersten Beispiele im negativen Sinne war.

Wir haben angenommen, dass die geraden Linien *DO*, *FN*, *HM*, *KL* mit der Terrainfläche zusammenfallen; diese Annahme ist wieder nur dann mathematisch gerechtfertigt, wenn die Verbindungslinien der Nivellementspunkte in den zusammengehörigen Profilen, unter sich, und mit der Linie *AB* parallel sind. Hierfür, sowie für die Zweckmässigkeit der Profilaufnahme, bei welcher jene Parallelität stattfindet, gelten dieselben Gründe, welche im Hauptabschnitte *B*, besonders in § 28. für den analogen Fall angeführt wurden.

§ 33.

Inhalts-Bestimmung der Seitenentnahmen durch Netz-Nivellements.

Bei dem Netz-Nivellement wird der Anforderung am Schluss des vorhergehenden Paragraphen, Genüge geleistet.

a) Wir wollen nun zunächst die zwekmässigste Gestaltung der Netz-Figuren in Erwägung ziehen.

Es ist selbstverständlich, dass, je kleiner die Abstände der Netzpunkte von einander, gewählt werden, desto genauer der Inhalt der Seitenentnahme ermittelt werden kann. Um jedoch den Umfang der Arbeiten nicht auf unmotivirte Weise auszudehnen, wird man in der Praxis den Abstand eines Netzpunktes von dem zunächstliegenden im Minimo zu 5 M. annehmen. Bei dieser kleinen Distanz wird auch bei starker Wölbung und grossen Unebenheiten der Terrainfläche ein sehr annäherndes Zusammenfallen der Profillinie mit der Terrainfläche, entweder in allen, oder wenigstens in den meisten Netzfiguren einer Seitenentnahme stattfinden. In gewissen Fällen wird dieser kleine Abstand nur in der einen Richtung durch die Terrain-Beschaffenheit erfordert, während in der andern Richtung ein Abstand der Netzpunkte bis zu 20 M. als zulässig erscheint. Der Arbeits-Ersparniss wegen, wird man in dieser Richtung die Distanzen dann auch nicht kleiner wie 10 resp. 15 oder 20 M. annehmen, und man wendet in solchem Falle ein Rechtecknetz an, während in dem Falle, dass die Gestaltung der Terrainfläche nicht darauf hinweist, in der einen Richtung die Distanzen der Netzpunkte von einander, länger anzunehmen, wie in der andern Richtung, ein Quadratnetz abgesteckt und nivellirt wird.

Die Configuration der Terrainfläche lässt dem Obigen entsprechend, die Anwendung des Rechtecknetzes als zweckmässig erscheinen, wenn die Terrainfläche in der zu der Seitenentnahme erforderlichen Ausdehnung, eine der Walzen- oder der Kegelfläche ähnliche Gestaltung hat. Stellen wir hierbei die Anwendung von Rechtecken, deren Seiten 20 und 5 M. lang sind, der Anwendung von Quadraten, deren Seiten 10 M. lang sind, und die daher mit den Rechtecken gleichen Flächeninhalt haben, einander gegenüber. Werden bei einem einer Walzenfläche ähnlich gestalteten Bergrücken die langen Seiten der Rechtecke in die Richtung der Seite der Walzenfläche gelegt, so schneiden die kürzern Seiten im Profil Fig. 42 den kleinen Kreisabschnitt BDC ab, während die doppelt so langen Quadratseiten den viel mehr wie doppelt so grossen Kreisabschnitt $ABDC$ abschneiden würden; es ist daher der von der Quadratseite abgeschnittene, für die Inhalts-Berechnung verloren gehende Körper, obschon er nur halb so lang ist wie der von der Rechteckfläche abgeschnittene Körper, dennoch sehr viel grösser. Die bei Anwendung des Quadratnetzes in diesem Falle eintretende Abweichung von dem richtigeren Resultate bei Anwendung des Rechtecknetzes, findet im negativen Sinne statt, während bei einer mit der hohlen Walzenfläche ähnlichen Bergmulde jene Abweichung im positiven Sinne sein würde.

Werden bei der einer Kegelfläche ähnlichen Terrainfläche die langen Seiten der Rechtecke annähernd in gleiche Richtung mit der Seite des Kegels gelegt (dies kann sich allerdings nur bei einer Kegelfläche von sehr grossem Umfang auf eine gewisse Strecke mit der Rechteckform der Netzfiguren vereinigen lassen), so spricht derselbe Grund, der bei der einer Walzenfläche ähnlichen Terrainfläche für die Zweckmässigkeit der Anwendung des Rechtecknetzes geltend gemacht wurde, auch hier dafür.

Bei der einer Kugelfläche ähnlichen Terrainfläche gebührt dem Quadratnetz der Vorzug. Die Beweisführung ist wie bei Fig. 42, nur dass hier der grosse Kreisabschnitt nicht von der Quadratseite, sondern von der langen Seite des Rechtecks abgeschnitten wird. Ausser in diesem speciellen Falle ist das Quadratnetz überall da anzuwenden, wo die Terrainfläche eine unbestimmte vielfach wechselnde Gestaltung hat, oder wo dieselbe annähernd eine geneigte oder horizontale Ebene ist. In den beiden letzten Fällen können die Quadratseiten zu 20 M. angenommen werden.

b) Führen wir nun die Inhalts-Berechnung der in Fig. 43 dargestellten Seitenentnahme auf Grund der vor der Ausschachtung und nach der Ausschachtung gemachten Netz-Nivellements aus. Die an den

Netzpunkten eingeschriebenen Höhenzahlen sind: Die Terrain-Ordinate des Nivellements vor dem Ausschachten oben schwarz geschrieben, die Ordinate der Sohle der Seitenentnahme in der Mitte und in der Praxis roth geschrieben, hier eingeklammert, darunter die Differenz zwischen der Terrain-Ordinate und der Ordinate der Sohle, also die Tiefe der Seitenentnahme an der betreffenden Stelle, in der Praxis blau geschrieben.

Die Seitenentnahme Fig. 43 ist an einer Berglehne ausgeschachtet, und die Sohle läuft bei AH auf 0 aus. Bei den quadratischen und rechteckigen Figuren empfiehlt es sich, die 4 Höhen für jeden Theilkörper zusammenzuziehen, und die Summe mitten in die betreffende Figur einzuschreiben. Der Inhalt dieser Theilkörper wird dann nach Formel 13. berechnet. Die Inhalte der Theilkörper, deren Grundrisse Paralleltrapeze sind, werden nach Formel 16., und wenn 2 Höhen $= 0$ sind, nach Formel 17. berechnet. Ausserdem kommen noch Pyramiden zur Berechnung. Die Lage der Theilkörper wird durch Buchstaben bezeichnet. Hat die Seitenentnahme eine grosse Grundfläche, so hat man einzelne Hauptabschnitte abzutheilen, um für jeden Hauptabschnitt die Lage des Schwerpunktes, Behufs Ermittelung der Transportweite, feststellen zu können.

ad 1. 4 Theilkörper zwischen AH und BS:

$$\overset{71,00}{(2\cdot 2{,}52+2{,}06)}\ 10{,}0+\overset{59,10}{(2{,}52+2\cdot 2{,}06)}\ 8{,}9=130{,}10$$

$$\overset{53,04}{(2\cdot 2{,}06+1{,}84)}\ 8{,}9+\overset{48,79}{(2{,}06+2\cdot 1{,}84)}\ 8{,}5=101{,}83$$

$$\overset{49,89}{(2\cdot 1{,}84+2{,}19)}\ 8{,}5+\overset{54,74}{(1{,}84+2\cdot 2{,}19)}\ 8{,}8=104{,}63$$

$$\overset{55,53}{(2\cdot 2{,}19+1{,}93)}\ 8{,}8+\overset{48,40}{(2{,}19+2\cdot 1{,}93)}\ 8{,}0=103{,}93$$

$$440{,}49\cdot\frac{10{,}0}{12}=367{,}08\,\text{Cbkm.}$$

Die Aufstellung kann durch Zusammenziehen vereinfacht werden:

$$\overset{5,04}{(2\cdot 2{,}52+2{,}06)}\ 10{,}0 = 71{,}00$$

$$\overset{8,24}{(4\cdot 2{,}06+2{,}52+1{,}84)}\ 8{,}9 = 112{,}14$$

$$\overset{7,36}{(4\cdot 1{,}84+2{,}06+2{,}19)}\ 8{,}5 = 98{,}69$$

$$\overset{8,76}{(4\cdot 2{,}19+1{,}84+1{,}93)}\ 8{,}8 = 110{,}26$$

$$\overset{3,86}{(2\cdot 1{,}93+2{,}19)}\ 8{,}0 = 48{,}40$$

$$440{,}49\cdot\frac{10{,}0}{12}=367{,}08\ \text{Cubkm. wie vor.}$$

Latus 367,08 Cubkm.

Transport = 367,08 Cubkm.

ad 2. Die Pyramide ABU:

$\frac{2{,}52 \cdot 4{,}0}{2} \cdot \frac{10{,}0}{3} =$ . . . . . 16,80 Cubkm.

ad 3. Die beiden Körper zwischen BL und UM:

$(2 \cdot 2{,}52 + 3{,}82)\ 4{,}0 = \overset{5{,}04}{\cdot}\ .\ .\ .\ .$ 35,44

$(4 \cdot 3{,}82 + 2{,}52 + 4{,}80)\ 6{,}3 = \overset{13{,}28}{\cdot}\ .$ 129,78

$(2 \cdot 4{,}80 + 3{,}82)\ 7{,}0 = \overset{9{,}60}{\cdot}\ .\ .\ .\ .$ 93,94

$259{,}16 \cdot \frac{10{,}0}{12} = 215{,}97$ „

ad 4. 6 Körper zwischen LD und ME:

$(2 \cdot 4{,}80 + 5{,}41)\ 7{,}0 = \overset{9{,}60}{\cdot}\ .\ .\ .\ .$ 105,07

$(4 \cdot 5{,}41 + 4{,}80 + 2{,}70)\ 7{,}9 = \overset{21{,}64}{\cdot}\ .$ 230,21

$(2 \cdot 2{,}70 + 5{,}41)\ 4{,}0 = \overset{5{,}40}{\cdot}\ .\ .\ .\ .$ 43,24

$378{,}52 \cdot \frac{5{,}0}{12} = 157{,}72$ „

$\frac{4{,}0 \cdot 2{,}70}{2} \cdot \frac{4{,}4}{3} =$ . . . . . 7,92 „

$\frac{4{,}6 \cdot 2{,}70}{2} \cdot \frac{4{,}4}{3} =$ . . . . . 9,11 „

$\frac{(5{,}41 + 2{,}77 + 2{,}70)}{3} \cdot \frac{5{,}0 \cdot 5{,}0}{2} =$ . . . . . 45,33 „

$\Big[(2 \cdot 2{,}70 + 2{,}77)\ 4{,}6 + (2{,}70 + 2 \cdot 2{,}77)\ 5{,}1\Big] \frac{5{,}0}{12} = \overset{37{,}58}{}\ \overset{42{,}02}{}$ 33,17 „

ad 5. 4 Körper zwischen RQ und DI:

$(2 \cdot 2{,}77 + 2{,}69)\ 5{,}1 = \overset{5{,}54}{\cdot}\ .\ .\ .\ .$ 41,97

$(4 \cdot 2{,}69 + 2{,}77 + 2{,}16)\ 4{,}6 = \overset{10{,}76}{\cdot}\ .\ .$ 72,17

$(4 \cdot 2{,}16 + 2{,}69 + 2{,}51)\ 4{,}2 = \overset{8{,}64}{\cdot}\ .\ .$ 58,13

$(4 \cdot 2{,}51 + 2{,}16 + 1{,}84)\ 4{,}8 = \overset{10{,}04}{\cdot}\ .\ .$ 67,39

$(2 \cdot 1{,}84 + 2{,}51)\ 3{,}4 = \overset{3{,}68}{\cdot}\ .\ .\ .\ .$ 21,05

$260{,}71 \cdot \frac{10{,}0}{12} = 217{,}26$ „

Latus 1070,36 Cubkm.

Transport = 1070,36 Cubkm.

ad 6. 6 Körper zwischen KI und OG:

$$\left[\overset{17,78}{(2 \cdot 1,84 + 1,55)}\, 3,4 + \overset{13,34}{(1,84 + 2 \cdot 1,55)}\, 2,7\right] \frac{5,0}{12} = \quad 12,97 \text{ Cubkm.}$$

$$\frac{2,7 \cdot 1,55}{2} \cdot \frac{2,5}{3} = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1,74 \text{ „}$$

$$\frac{2,1 \cdot 1,55}{2} \cdot \frac{2,5}{3} = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1,36 \text{ „}$$

$$\frac{(4,48 + 1,84 + 1,55)}{3} \cdot \frac{5,0 \cdot 5,0}{2} = \ldots\ldots\ldots \quad 32,79 \text{ „}$$

$$\overset{3,10}{(2 \cdot 1,55 + 4,48)}\, 2,1 = \ldots\ldots \quad 15,92$$

$$\overset{17,92}{(4 \cdot 4,48 + 1,55 + 3,86)}\, 6,3 = \ldots \quad 146,98$$

$$\overset{7,72}{(2 \cdot 3,86 + 4,48)}\, 5,6 = \ldots\ldots \quad 68,32$$

$$231,22 \cdot \frac{5,0}{12} = \quad 96,34 \text{ „}$$

ad 7. 2 Körper zwischen KS und OT:

$$\overset{7,72}{(2 \cdot 3,86 + 3,01)}\, 5,6 = \ldots\ldots \quad 60,09$$

$$\overset{12,04}{(4 \cdot 3,01 + 3,86 + 1,93)}\, 4,7 = \ldots \quad 83,80$$

$$\overset{3,86}{(2 \cdot 1,93 + 3,01)}\, 2,8 = \ldots\ldots \quad 19,24$$

$$163,13 \cdot \frac{10,0}{12} = 135,94 \text{ „}$$

ad 8. Die Pyramide STH:

$$\frac{2,8 \cdot 1,93}{2} \cdot \frac{8,0}{3} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 7,21 \text{ „}$$

ad 9. 8 Körper zwischen RQ und LK:

16,00
14,93
14,52
13,73
17,26
18,33
18,82
19,62

$$\frac{133,21}{4} \cdot 10,0 \cdot 5,0 = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1665,12 \text{ „}$$

Latus 3023,83 Cubkm.

Transport = 3023,83 Cubkm.

ad 10. 8 Körper zwischen LK und BS:

16,57
15,69
15,21
14,34
10,58
10,76
10,85
12,07

$\frac{106,07}{4} \cdot 10,0 \cdot 10,0 =$ . . . . . 2651,75 „

Summa = 5675,58 Cubkm.

c) Bei dem vorhergehenden Beispiele hatten wir nicht Gelegenheit zu zeigen, in welcher Weise die Aufstellung für die Inhalts-Berechnung von Körpern nach Formel 16., vereinfacht werden kann, wenn diese Körper aneinanderliegen und gleiche Breite haben; dazu diene Fig. 44.

i_1 k, m, o, q, s, h, l, n, p, r, t seien die Höhen der Körper.

Nach Formel 16. ist der Inhalt

$$I =$$
$$\Big[(2h + 2i + l + k)\, a + (h + i + 2l + 2k)\, b$$
$$+ (2l + 2k + n + m)\, b + (l + k + 2n + 2m)\, c$$
$$+ (2n + 2m + p + o)\, c + (n + m + 2p + 2o)\, d$$
$$+ (2p + 2o + r + q)\, d + (p + o + 2r + 2q)\, f$$
$$+ (2r + 2q + t + s)\, f + (r + q + 2t + 2s)\, g\Big] \frac{e}{12}.$$

Zusammengezogen ist die Aufstellung

$$I =$$
$$\Big[(2h + 2i + l + k)\, a$$
$$+ (4l + 4k + h + i + n + m)\, b$$
$$+ (4n + 4m + l + k + p + o)\, c$$
$$+ (4p + 4o + n + m + r + q)\, d$$
$$+ (4r + 4q + p + o + t + s)\, f$$
$$+ (2t + 2s + r + q)\, g\Big] \frac{e}{12}.$$

Tabelle

für $\frac{d^2}{8}$ (siehe § 5.) bei den von Centimeter zu Centimeter fortschreitend, von 0,01 bis 24,00 Meter für d in Formel 4. $\left[I = \left(F_1 + \frac{d^2}{8}\right) e\right]$ angenommenen Werthen.

Bem. Die Tabelle ist für die Inhalts-Berechnung des Bahnkörpers bei jeder Planumsbreite, und der Gräben bei jeder Sohlenbreite anwendbar; Erfordernisse sind nur, dass die Böschungen $1\frac{1}{2}$ füssig sind, und dass das Quergefälle des Terrains vernachlässigt werden kann.

d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.
0,01	0,00	0,41	0,02	0,81	0,08	1,21	0,18	1,61	0,32
0,02	0,00	0,42	0,02	0,82	0,08	1,22	0,19	1,62	0,33
0,03	0,00	0,43	0,02	0,83	0,09	1,23	0,19	1,63	0,33
0,04	0,00	0,44	0,02	0,84	0,09	1,24	0,19	1,64	0,34
0,05	0,00	0,45	0,03	0,85	0,09	1,25	0,20	1,65	0,34
0,06	0.00	0,46	0,03	0,86	0,09	1,26	0,20	1,66	0,34
0,07	0,00	0,47	0,03	0,87	0,09	1,27	0,20	1,67	0,35
0,08	0,00	0,48	0,03	0,88	0,10	1,28	0,20	1,68	0,35
0,09	0,00	0,49	0,03	0,89	0,10	1,29	0,21	1,69	0,35
0,10	0,00	0,50	0,03	0,90	0,10	1,30	0,21	1,70	0,36
0,11	0,00	0,51	0,03	0,91	0,10	1,31	0,21	1,71	0,36
0,12	0,00	0,52	0,03	0,92	0,11	1,32	0,22	1,72	0,37
0,13	0,00	0,53	0,04	0,93	0,11	1,33	0,22	1,73	0,37
0,14	0,00	0,54	0,04	0,94	0,11	1,34	0,22	1,74	0,38
0,15	0,00	0,55	0,04	0,95	0,11	1,35	0,23	1,75	0,38
0,16	0,00	0,56	0,04	0,96	0,12	1,36	0,23	1,76	0,39
0,17	0,00	0,57	0,04	0,97	0,12	1,37	0,23	1,77	0,39
0,18	0,00	0,58	0,04	0,98	0,12	1,38	0,24	1,78	0,40
0,19	0,00	0,59	0,04	0,99	0,12	1,39	0,24	1,79	0,40
0,20	0,01	0,60	0,05	1,00	0,13	1,40	0,25	1,80	0,41
0,21	0,01	0,61	0,05	1,01	0,13	1,41	0,25	1,81	0,41
0,22	0,01	0,62	0,05	1,02	0,13	1,42	0,25	1,82	0,41
0,23	0,01	0,63	0,05	1,03	0,13	1,43	0,26	1,83	0,42
0,24	0,01	0,64	0,05	1,04	0,14	1,44	0,26	1,84	0,42
0,25	0,01	0,65	0,05	1,05	0,14	1,45	0,26	1,85	0,43
0,26	0,01	0,66	0,05	1,06	0,14	1,46	0,27	1,86	0,43
0,27	0,01	0,67	0,06	1,07	0,14	1,47	0,27	1,87	0,44
0,28	0,01	0,68	0,06	1,08	0,15	1,48	0,27	1,88	0,44
0,29	0,01	0,69	0,06	1,09	0,15	1,49	0,28	1,89	0,45
0,30	0,01	0,70	0,06	1,10	0,15	1,50	0,28	1,90	0,45
0,31	0,01	0,71	0,06	1,11	0,15	1,51	0,28	1,91	0,46
0,32	0,01	0,72	0,06	1,12	0,16	1,52	0,29	1,92	0,46
0,33	0,01	0,73	0,07	1,13	0,16	1,53	0,29	1,93	0,47
0,34	0,01	0,74	0,07	1,14	0,16	1,54	0,30	1,94	0,47
0,35	0,02	0,75	0,07	1,15	0,17	1,55	0,30	1,95	0,48
0,36	0,02	0,76	0,07	1,16	0,17	1,56	0,30	1,96	0,48
0,37	0,02	0,77	0,07	1,17	0,17	1,57	0,31	1,97	0,49
0,38	0,02	0,78	0,08	1,18	0,17	1,58	0,31	1,98	0,49
0,39	0,02	0,79	0,08	1,19	0,18	1,59	0,32	1,99	0,49
0,40	0,02	0,80	0,08	1,20	0,18	1,60	0,32	2,00	0,50

d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.
2,01	0,50	2,41	0,73	2,81	0,99	3,21	1,29	3,61	1,63
2,02	0,51	2,42	0,73	2,82	0,99	3,22	1,30	3,62	1,64
2,03	0,51	2,43	0,74	2,83	1,00	3,23	1,30	3,63	1,65
2,04	0,52	2,44	0,74	2,84	1,01	3,24	1,31	3,64	1,66
2,05	0,52	2,45	0,75	2,85	1,02	3,25	1,32	3,65	1,67
2,06	0,53	2,46	0,76	2,86	1,02	3,26	1,33	3,66	1,67
2,07	0,53	2,47	0,76	2,87	1,03	3,27	1,34	3,67	1,68
2,08	0,54	2,48	0,77	2,88	1,04	3,28	1,34	3,68	1,69
2,09	0,54	2,49	0,78	2,89	1,04	3,29	1,35	3,69	1,70
2,10	0,55	2,50	0,78	2,90	1,05	3,30	1,36	3,70	1,71
2,11	0,55	2,51	0,79	2,91	1,06	3,31	1,37	3,71	1,72
2,12	0,56	2,52	0,79	2,92	1,07	3,32	1,38	3,72	1,73
2,13	0,56	2,53	0,80	2,93	1,07	3,33	1,39	3,73	1,74
2,14	0,57	2,54	0,81	2,94	1,08	3,34	1,39	3,74	1,75
2,15	0,57	2,55	0,81	2,95	1,09	3,35	1,40	3,75	1,76
2,16	0,58	2,56	0,82	2,96	1,10	3,36	1,41	3,76	1,77
2,17	0,59	2,57	0,83	2,97	1,10	3,37	1,42	3,77	1,78
2,18	0,59	2,58	0,83	2,98	1,11	3,38	1,43	3,78	1,79
2,19	0,60	2,59	0,84	2,99	1,12	3,39	1,44	3,79	1,80
2,20	0,61	2,60	0,85	3,00	1,13	3,40	1,45	3,80	1,81
2,21	0,61	2,61	0,85	3,01	1,13	3,41	1,45	3,81	1,81
2,22	0,62	2,62	0,86	3,02	1,14	3,42	1,46	3,82	1,82
2,23	0,62	2,63	0,86	3,03	1,15	3,43	1,47	3,83	1,83
2,24	0,63	2,64	0,87	3,04	1,16	3,44	1,48	3,84	1,84
2,25	0,63	2,65	0,88	3,05	1,16	3,45	1,49	3,85	1,85
2,26	0,64	2,66	0,88	3,06	1,17	3,46	1,50	3,86	1,86
2,27	0,64	2,67	0,89	3,07	1,18	3,47	1,51	3,87	1,87
2,28	0,65	2,68	0,90	3,08	1,19	3,48	1,51	3,88	1,88
2,29	0,66	2,69	0,90	3,09	1,19	3,49	1,52	3,89	1,89
2,30	0,66	2,70	0,91	3,10	1,20	3,50	1,53	3,90	1,90
2,31	0,67	2,71	0,92	3,11	1,21	3,51	1,54	3,91	1,91
2,32	0,67	2,72	0,92	3,12	1,22	3,52	1,55	3,92	1,92
2,33	0,68	2,73	0,93	3,13	1,22	3,53	1,56	3,93	1,93
2,34	0,68	2,74	0,94	3,14	1,23	3,54	1,57	3,94	1,94
2,35	0,69	2,75	0,95	3,15	1,24	3,55	1,58	3,95	1,95
2,36	0,70	2,76	0,95	3,16	1,25	3,56	1,58	3,96	1,96
2,37	0,70	2,77	0,96	3,17	1,26	3,57	1,59	3,97	1,97
2,38	0,71	2,78	0,97	3,18	1,26	3,58	1,60	3,98	1,98
2,39	0,71	2,79	0,97	3,19	1,27	3,59	1,61	3,99	1,99
2,40	0,72	2,80	0,98	3,20	1,28	3,60	1,62	4,00	2,00

d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.
4,01	2,01	4,41	2,43	4,81	2,89	5,21	3,39	5,61	3,93
4,02	2,02	4,42	2,44	4,82	2,90	5,22	3,41	5,62	3,95
4,03	2,03	4,43	2,45	4,83	2,91	5,23	3,42	5,63	3,96
4,04	2,04	4,44	2,46	4,84	2,93	5,24	3,43	5,64	3,98
4,05	2,05	4,45	2,48	4,85	2,94	5,25	3,45	5,65	3,99
4,06	2,06	4,46	2,49	4,86	2,95	5,26	3,46	5,66	4,00
4,07	2,07	4,47	2,50	4,87	2,96	5,27	3,47	5,67	4,02
4,08	2,08	4,48	2,51	4,88	2,98	5,28	3,48	5,68	4,03
4,09	2,09	4,49	2,52	4,89	2,99	5,29	3,50	5,69	4,05
4,10	2,10	4,50	2,53	4,90	3,00	5,30	3,51	5,70	4,06
4,11	2,11	4,51	2,54	4,91	3,01	5,31	3,52	5,71	4,08
4,12	2,12	4,52	2,55	4,92	3,03	5,32	3,54	5,72	4,09
4,13	2,13	4,53	2,57	4,93	3,04	5,33	3,55	5,73	4.10
4,14	2,14	4,54	2,58	4,94	3,05	5,34	3,56	5,74	4,12
4,15	2,15	4,55	2,59	4,95	3,06	5,35	3,58	5,75	4,13
4,16	2,16	4,56	2,60	4,96	3,08	5,36	3,59	5,76	4,15
4,17	2,17	4,57	2,61	4,97	3,09	5,37	3,60	5,77	4,16
4,18	2,18	4,58	2,62	4,98	3,10	5,38	3,62	5,78	4,18
4,19	2,19	4,59	2,63	4,99	3,11	5,39	3,63	5,79	4,19
4,20	2,20	4,60	2,65	5,00	3,13	5,40	3,65	5,80	4,21
4,21	2,22	4,61	2,66	5,01	3,14	5,41	3,66	5,81	4,22
4,22	2,23	4,62	2,67	5,02	3,15	5,42	3,67	5,82	4,23
4,23	2,24	4,63	2,68	5,03	3,16	5,43	3,69	5,83	4,25
4,24	2,25	4,64	2,69	5,04	3,18	5,44	3,70	5,84	4,26
4,25	2,26	4,65	2,70	5,05	3,19	5,45	3,71	5,85	4,28
4,26	2,27	4,66	2,71	5,06	3,20	5,46	3,73	5,86	4,29
4,27	2,28	4,67	2,73	5,07	3,21	5,47	3,74	5,87	4,31
4,28	2,29	4,68	2,74	5,08	3,23	5,48	3,75	5,88	4,32
4,29	2,30	4,69	2,75	5,09	3,24	5,49	3,77	5,89	4,34
4,30	2,31	4,70	2,76	5,10	3,25	5,50	3,78	5,90	4,35
4,31	2,32	4,71	2,77	5,11	3,26	5,51	3,79	5,91	4,37
4,32	2,33	4,72	2,78	5,12	3,28	5,52	3,81	5,92	4,38
4,33	2,34	4,73	2,80	5,13	3,29	5,53	3,82	5,93	4,40
4,34	2,35	4,74	2,81	5,14	3,30	5,54	3,84	5,94	4,41
4,35	2,37	4,75	2,82	5,15	3,32	5,55	3,85	5,95	4,43
4,36	2,38	4,76	2,83	5,16	3,33	5,56	3,86	5,96	4,44
4,37	2,39	4,77	2,84	5,17	3,34	5,57	3,88	5,97	4,46
4,38	2,40	4,78	2,86	5,18	3,35	5,58	3,89	5,98	4,47
4,39	2,41	4,79	2,87	5,19	3,37	5,59	3,91	5,99	4,49
4,40	2,42	4,80	2,88	5,20	3,38	5,60	3,92	6,00	4,50

d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.
6,01	4,52	6,41	5,14	6,81	5,80	7,21	6,50	7,61	7,24
6,02	4,53	6,42	5,15	6,82	5,81	7,22	6,52	7,62	7,26
6,03	4,55	6,43	5,17	6,83	5,83	7,23	6,53	7,63	7,28
6,04	4,56	6,44	5,18	6,84	5,85	7,24	6,55	7,64	7,30
6,05	4,57	6,45	5,20	6,85	5,87	7,25	6,57	7,65	7,32
6,06	4,59	6,46	5,22	6,86	5,88	7,26	6,59	7,66	7,33
6,07	4,61	6,47	5,23	6,87	5,90	7,27	6,61	7,67	7,35
6,08	4,62	6,48	5,25	6,88	5,92	7,28	6,62	7,68	7,37
6,09	4,64	6,49	5,27	6,89	5,93	7,29	6,64	7,69	7,39
6,10	4,65	6,50	5,28	6,90	5,95	7,30	6,66	7,70	7,41
6,11	4,67	6,51	5,30	6,91	5,97	7,31	6,68	7,71	7,43
6,12	4,68	6,52	5,31	6,92	5,99	7,32	6,70	7,72	7,45
6,13	4,70	6,53	5,33	6,93	6,00	7,33	6,72	7,73	7,47
6,14	4,71	6,54	5,35	6,94	6,02	7,34	6,73	7,74	7,49
6,15	4,73	6,55	5,36	6,95	6,04	7,35	6,75	7,75	7,51
6,16	4,74	6,56	5,38	6,96	6,06	7,36	6,77	7,76	7,53
6,17	4,76	6,57	5,40	6,97	6,07	7,37	6,79	7,77	7,55
6,18	4,77	6,58	5,41	6,98	6,09	7,38	6,81	7,78	7,57
6,19	4,79	6,59	5,43	6,99	6,11	7,39	6,83	7,79	7,59
6,20	4,81	6,60	5,45	7,00	6,13	7,40	6,85	7,80	7,61
6,21	4,82	6,61	5,46	7,01	6,14	7,41	6,86	7,81	7,62
6,22	4,84	6,62	5,48	7,02	6,16	7,42	6,88	7,82	7,64
6,23	4,85	6,63	5,49	7,03	6,18	7,43	6,90	7,83	7,66
6,24	4,87	6,64	5,51	7,04	6,20	7,44	6,92	7,84	7,68
6,25	4,88	6,65	5,53	7,05	6,21	7,45	6,94	7,85	7,70
6,26	4,90	6,66	5,54	7,06	6,23	7,46	6,96	7,86	7,72
6,27	4,91	6,67	5,56	7,07	6,25	7,47	6,98	7,87	7,74
6,28	4,93	6,68	5,58	7,08	6,27	7,48	6,99	7,88	7,76
6,29	4,95	6,69	5,59	7,09	6,28	7,49	7,01	7,89	7,78
6,30	4,96	6,70	5,61	7,10	6,30	7,50	7,03	7,90	7,80
6,31	4,98	6,71	5,63	7,11	6,32	7,51	7,05	7,91	7,82
6,32	4,99	6,72	5,64	7,12	6,34	7,52	7,07	7,92	7,84
6,33	5,01	6,73	5,66	7,13	6,35	7,53	7,09	7,93	7,86
6,34	5,02	6,74	5,68	7,14	6,37	7,54	7,11	7,94	7,88
6,35	5,04	6,75	5,70	7,15	6,39	7,55	7,13	7,95	7,90
6,36	5,06	6,76	5,71	7,16	6,41	7,56	7,14	7,96	7,92
6,37	5,07	6,77	5,73	7,17	6,43	7,57	7,16	7,97	7,94
6,38	5,09	6,78	5,75	7,18	6,44	7,58	7,18	7,98	7,96
6,39	5,10	6,79	5,76	7,19	6,46	7,59	7,20	7,99	7,98
6,40	5,12	6,80	5,78	7,20	6,48	7,60	7,22	8,00	8,00

d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.
8,01	8,02	8,41	8,84	8,81	9,70	9,21	10,60	9,61	11,54
8,02	8,04	8,42	8,86	8,82	9,72	9,22	10,63	9,62	11,57
8,03	8,06	8,43	8,88	8,83	9,75	9,23	10,65	9,63	11,59
8,04	8,08	8,44	8,90	8,84	9,77	9,24	10,67	9,64	11,62
8,05	8,10	8,45	8,93	8,85	9,79	9,25	10,70	9,65	11,64
8,06	8,12	8,46	8,95	8,86	9,81	9,26	10,72	9,66	11,66
8,07	8,14	8,47	8,97	8,87	9,83	9,27	10,74	9,67	11,69
8,08	8,16	8,48	8,99	8,88	9,86	9,28	10,76	9,68	11,71
8,09	8,18	8,49	9,01	8,89	9,88	9,29	10,79	9,69	11,74
8,10	8,20	8,50	9,03	8,90	9,90	9,30	10,81	9,70	11,76
8,11	8,22	8,51	9,05	8,91	9,92	9,31	10,83	9,71	11,79
8,12	8,24	8,52	9,07	8,92	9,95	9,32	10,86	9,72	11,81
8,13	8,26	8,53	9,10	8,93	9,97	9,33	10,88	9,73	11,83
8,14	8,28	8,54	9,12	8,94	9,99	9,34	10,90	9,74	11,86
8,15	8,30	8,55	9,14	8,95	10,01	9,35	10,93	9,75	11,88
8,16	8,32	8,56	9,16	8,96	10,04	9,36	10,95	9,76	11,91
8,17	8,34	8,57	9,18	8,97	10,06	9,37	10,97	9,77	11,93
8,18	8,36	8,58	9,20	8,98	10,08	9,38	11,00	9,78	11,96
8,19	8,38	8,59	9,22	8,99	10,10	9,39	11,02	9,79	11,98
8,20	8,41	8,60	9,25	9,00	10,13	9,40	11,05	9,80	12,01
8,21	8,43	8,61	9,27	9,01	10,15	9,41	11,07	9,81	12,03
8,22	8,45	8,62	9,29	9,02	10,17	9,42	11,09	9,82	12,05
8,23	8,47	8,63	9,31	9,03	10,19	9,43	11,12	9,83	12,08
8,24	8,49	8,64	9,33	9,04	10,22	9,44	11,14	9,84	12,10
8,25	8,51	8,65	9,35	9,05	10,24	9,45	11,16	9,85	12,13
8,26	8,53	8,66	9,37	9,06	10,26	9,46	11,19	9,86	12,15
8,27	8,55	8,67	9,40	9,07	10,28	9,47	11,21	9,87	12,18
8,28	8,57	8,68	9,42	9,08	10,31	9,48	11,23	9,88	12,20
8,29	8,59	8,69	9,44	9,09	10,33	9,49	11,26	9,89	12,23
8,30	8,61	8,70	9,46	9,10	10,35	9,50	11,28	9,90	12,25
8,31	8,63	8,71	9,48	9,11	10,37	9,51	11,31	9,91	12,28
8,32	8,65	8,72	9,50	9,12	10,40	9,52	11,33	9,92	12,30
8,33	8,67	8,73	9,53	9,13	10,42	9,53	11,35	9,93	12,33
8,34	8,69	8,74	9,55	9,14	10,44	9,54	11,38	9,94	12,35
8,35	8,72	8,75	9,57	9,15	10,47	9,55	11,40	9,95	12,38
8,36	8,74	8,76	9,59	9,16	10,49	9,56	11,42	9,96	12,40
8,37	8,76	8,77	9,61	9,17	10,51	9,57	11,45	9,97	12,43
8,38	8,78	8,78	9,64	9,18	10,53	9,58	11,47	9,98	12,45
8,39	8,80	8,79	9,66	9,19	10,56	9,59	11,50	9,99	12,48
8,40	8,82	8,80	9,68	9,20	10,58	9,60	11,52	10,00	12,50

d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.
10,01	12,53	10,41	13,55	10,81	14,61	11,21	15,71	11,61	16,85
10,02	12,55	10,42	13,57	10,82	14,63	11,22	15,74	11,62	16,88
10,03	12,58	10,34	13,60	10,83	14,66	11,23	15,76	11,63	16,91
10,04	12,60	10,44	13,62	10,84	14,69	11,24	15,79	11,64	16,94
10,05	12,63	10,45	13,65	10,85	14,72	11,25	15,82	11,65	16,97
10,06	12,65	10,46	13,68	10,86	14,74	11,26	15,85	11,66	16,99
10,07	12,68	10,47	13,70	10,87	14,77	11,27	15,88	11,67	17,02
10,08	12,70	10,48	13,73	10,88	14,80	11,28	15,90	11,68	17,05
10,09	12,73	10,49	13,76	10,89	14,82	11,29	15,93	11,69	17,08
10,10	12,75	10,50	13,78	10,90	14,85	11,30	15,96	11,70	17,11
10,11	12,78	10,51	13,81	10,91	14,88	11,31	15,99	11,71	17,14
10,12	12,80	10,52	13,83	10,92	14,91	11,32	16,02	11,72	17,17
10,13	12,83	10,53	13,86	10,93	14,93	11,33	16,05	11,73	17,20
10,14	12,85	10,54	13,89	10,94	14,96	11,34	16,07	11,74	17,23
10,15	12,88	10,55	13,91	10,95	14,99	11,35	16,10	11,75	17,26
10,16	12,90	10,56	13,94	10,96	15,02	11,36	16,13	11,76	17,29
10,17	12,93	10,57	13,97	10,97	15,04	11,37	16,16	11,77	17,32
10,18	12,95	10,58	13,99	10,98	15,07	11,38	16,19	11,78	17,35
10,19	12,98	10,59	14,02	10,99	15,10	11,39	16,22	11,79	17,38
10,20	13,01	10,60	14,05	11,00	15,13	11,40	16,25	11,80	17,41
10,21	13,03	10,61	14,07	11,01	15,15	11,41	16,27	11,81	17,43
10,22	13,06	10,62	14,10	11,02	15,18	11,42	16,30	11,82	17,46
10,23	13,08	10,63	14,12	11,03	15,21	11,43	16,33	11,83	17,49
10,24	13,11	10,64	14,15	11,04	15,24	11,44	16,36	11,84	17,52
10,25	13,13	10,65	14,18	11,05	15,26	11,45	16,39	11,85	17,55
10,26	13,16	10,66	14,20	11,06	15,29	11,46	16,42	11,86	17,58
10,27	13,18	10,67	14,23	11,07	15,32	11,47	16,45	11,87	17,61
10,28	13,21	10,68	14,26	11,08	15,35	11,48	16,47	11,88	17,64
10,29	13,24	10,69	14,28	11,09	15,37	11,49	16,50	11,89	17,67
10,30	13,26	10,70	14,31	11,10	15,40	11,50	16,53	11,90	17,70
10,31	13,29	10,71	14,34	11,11	15,43	11,51	16,56	11,91	17,73
10,32	13,31	10,72	14,36	11,12	15,46	11,52	16,59	11,92	17,76
10,33	13,34	10,73	14,39	11,13	15,48	11,53	16,62	11,93	17,79
10,34	13,36	10,74	14,42	11,14	15,51	11,54	16,65	11,94	17,82
10,35	13,39	10,75	14,45	11,15	15,54	11,55	16,68	11,95	17,85
10,36	13,42	10,76	14,47	11,16	15,57	11,56	16,70	11,96	17,88
10,37	13,44	10,77	14,50	11,17	15,60	11,57	16,73	11,97	17,91
10,38	13,47	10,78	14,53	11,18	15,62	11,58	16,76	11,98	17,94
10,39	13,49	10,79	14,55	11,19	15,65	11,59	16,79	11,99	17,97
10,40	13,52	10,80	14,58	11,20	15,68	11,60	16,82	12,00	18,00

d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.
12,01	18,03	12,41	19,25	12,81	20,51	13,21	21,81	13,61	23,15
12,02	18,06	12,42	19,28	12,82	20,54	13,22	21,85	13,62	23,19
12,03	18,09	12,43	19,31	12,83	20,58	13,23	21,88	13,63	23,22
12,04	18,12	12,44	19,34	12,84	20,61	13,24	21,91	13,64	23,26
12,05	18,15	12,45	19,38	12,85	20,64	13,25	21,95	13,65	23,29
12,06	18,18	12,46	19,41	12,86	20,67	13,26	21,98	13,66	23,32
12,07	18,21	12,47	19,44	12,87	20,70	13,27	22,01	13,67	23,36
12,08	18,24	12,48	19,47	12,88	20,74	13,28	22,04	13,68	23,39
12,09	18,27	12,49	19,50	12,89	20,77	13,29	22,08	13,69	23,43
12,10	18,30	12,50	19,53	12,90	20,80	13,30	22,11	13,70	23,46
12,11	18,33	12,51	19,56	12,91	20,83	13,31	22,14	13,71	23,50
12,12	18,36	12,52	19,59	12,92	20,87	13,32	22,18	13,72	23,53
12,13	18,39	12,53	19,63	12,93	20,90	13,33	22,21	13,73	23,56
12,14	18,42	12,54	19,66	12,94	20,93	13,34	22,24	13,74	23,60
12,15	18,45	12,55	19,69	12,95	20,96	13,35	22,28	13,75	23,63
12,16	18,48	12,56	19,72	12,96	21,00	13,36	22,31	13,76	23,67
12,17	18,51	12,57	19,75	12,97	21,03	13,37	22,34	13,77	23,70
12,18	18,54	12,58	19,78	12,98	21,06	13,38	22,38	13,78	23,74
12,19	18,57	12,59	19,81	12,99	21,09	13,39	22,41	13,79	23,77
12,20	18,61	12,60	19,85	13,00	21,13	13,40	22,45	13,80	23,81
12,21	18,64	12,61	19,88	13,01	21,16	13,41	22,48	13,81	23,84
12,22	18,67	12,62	19,91	13,02	21,19	13,42	22,51	13,82	23,87
12,23	18,70	12,63	19,94	13,03	21,22	13,43	22,55	13,83	23,91
12,24	18,73	12,64	19,97	13,04	21,26	13,44	22,58	13,84	23,94
12,25	18,76	12,65	20,00	13,05	21,29	13,45	22,61	13,85	23,98
12,26	18,79	12,66	20,03	13,06	21,32	13,46	22,65	13,86	24,01
12,27	18,82	12,67	20,07	13,07	21,35	13,47	22,68	13,87	24,05
12,28	18,85	12,68	20,10	13,08	21,39	13,48	22,71	13,88	24,08
12,29	18,88	12,69	20,13	13,09	21,42	13,49	22,75	13,89	24,12
12,30	18,91	12,70	20,16	13,10	21,45	13,50	22,78	13,90	24,15
12,31	18,94	12,71	20,19	13,11	21,48	13,51	22,82	13,91	24,19
12,32	18,97	12,72	20,22	13,12	21,52	13,52	22,85	13,92	24,22
12,33	19,00	12,73	20,26	13,13	21,55	13,53	22,88	13,93	24,26
12,34	19,03	12,74	20,29	13,14	21,58	13,54	22,92	13,94	24,29
12,35	19,07	12,75	20,32	13,15	21,62	13,55	22,95	13,95	24,33
12,36	19,10	12,76	20,35	13,16	21,65	13,56	22,98	13,96	24,36
12,37	19,13	12,77	20,38	13,17	21,68	13,57	23,02	13,97	24,40
12,38	19,16	12,78	20,42	13,18	21,71	13,58	23,05	13,98	24,43
12,39	19,19	12,79	20,45	13,19	21,75	13,59	23,09	13,99	24,47
12,40	19,22	12,80	20,48	13,20	21,78	13,60	23,12	14,00	24,50

d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.
14,01	24,54	14,41	25,96	14,81	27,42	15,21	28,92	15,61	30,46
14,02	24,57	14,42	25,99	14,82	27,45	15,22	28,96	15,62	30,50
14,03	24,61	14,43	26,03	14,83	27,49	15,23	28,99	15,63	30,54
14,04	24,64	14,44	26,06	14,84	27,53	15,24	29,03	15,64	30,58
14,05	24,68	14,45	26,10	14,85	27,57	15,25	29,07	15,65	30,62
14,06	24,71	14,46	26,14	14,86	27,60	15,26	29,11	15,66	30,65
14,07	24,75	14,47	26,17	14,87	27,64	15,27	29,15	15,67	30,69
14,08	24,78	14,48	26,21	14,88	27,68	15,28	29,18	15,68	30,73
14,09	24,82	14,49	26,25	14,89	27,71	15,29	29,22	15,69	30,77
14,10	24,85	14,50	26,28	14,90	27,75	15,30	29,26	15,70	30,81
14,11	24,89	14,51	26,32	14,91	27,79	15,31	29,30	15,71	30,85
14,12	24,92	14,52	26,35	14,92	27,83	15,32	29,34	15,72	30,89
14,13	24,96	14,53	26,39	14,93	27,86	15,33	29,38	15,73	30,93
14,14	24,99	14,54	26,43	14,94	27,90	15,34	29,41	15,74	30,97
14,15	25,03	14,55	26,46	14,95	27,94	15,35	29,45	15,75	31,01
14,16	25,06	14,56	26,50	14,96	27,98	15,36	29,49	15,76	31,05
14,17	25,10	14,57	26,54	14,97	28,01	15,37	29,53	15,77	31,09
14,18	25,13	14,58	26,57	14,98	28,05	15,38	29,57	15,78	31,13
14,19	25,17	14,59	26,61	14,99	28,09	15,39	29,61	15,79	31,17
14,20	25,21	14,60	26,65	15,00	28,13	15,40	29,65	15,80	31,21
14,21	25,24	14,61	26,68	15,01	28,16	15,41	29,68	15,81	31,24
14,22	25,28	14,62	26,72	15,02	28,20	15,42	29,72	15,82	31,28
14,23	25,31	14,63	26,75	15,03	28,24	15,43	29,76	15,83	31,32
14,24	25,35	14,64	26,79	15,04	28,28	15,44	29,80	15,84	31,36
14,25	25,38	14,65	26,83	15,05	28,31	15,45	29,84	15,85	31,40
14,26	25,42	14,66	26,86	15,06	28,35	15,46	29,88	15,86	31,44
14,27	25,45	14,67	26,90	15,07	28,39	15,47	29,92	15,87	31,48
14,28	25,49	14,68	26,94	15,08	28,43	15,48	29,95	15,88	31,52
14,29	25,53	14,69	26,97	15,09	28,46	15,49	29,99	15,89	31,56
14,30	25,56	14,70	27,01	15,10	28,50	15,50	30,03	15,90	31,60
14,31	25,60	14,71	27,05	15,11	28,54	15,51	30,07	15,91	31,64
14,32	25,63	14,72	27,08	15,12	28,58	15,52	30,11	15,92	31,68
14,33	25,67	14,73	27,12	15,13	28,61	15,53	30,15	15,93	31,72
14,34	25,70	14,74	27,16	15,14	28,65	15,54	30,19	15,94	31,76
14,35	25,74	14,75	27,20	15,15	28,69	15,55	30,23	15,95	31,80
14,36	25,78	14,76	27,23	15,16	28,73	15,56	30,26	15,96	31,84
14,37	25,81	14,77	27,27	15,17	28,77	15,57	30,30	15,97	31,88
14,38	25,85	14,78	27,31	15,18	28,80	15,58	30,34	15,98	31,92
14,39	25,88	14,79	27,34	15,19	28,84	15,59	30,38	15,99	31,96
14,40	25,92	14,80	27,38	15,20	28,88	15,60	30,42	16,00	32,00

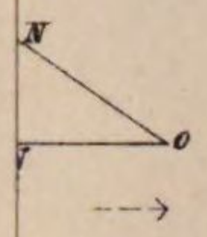
d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □Meter.
16,01	32,04	16,41	33,66	16,81	35,32	17,21	37,02	17,61	38,76
16,02	32,08	16,42	33,70	16,82	35,36	17,22	37,07	17,62	38,81
16,03	32,12	16,43	33,74	16,83	35,41	17,23	37,11	17,63	38,85
16,04	32,16	16,44	33,78	16,84	35,45	17,24	37,15	17,64	38,90
16,05	32,20	16,45	33,83	16,85	35,49	17,25	37,20	17,65	38,94
16,06	32,24	16,46	33,87	16,86	35,53	17,26	37,24	17,66	38,98
16,07	32,28	16,47	33,91	16,87	35,57	17,27	37,28	17,67	39,03
16,08	32,32	16,48	33,95	16,88	35,62	17,28	37,32	17,68	39,07
16,09	32,36	16,49	33,99	16,89	35,66	17,29	37,37	17,69	39,12
16,10	32,40	16,50	34,03	16,90	35,70	17,30	37,41	17,70	39,16
16,11	32,44	16,51	34,07	16,91	35,74	17,31	37,45	17,71	39,21
16,12	32,48	16,52	34,11	16,92	35,79	17,32	37,50	17,72	39,25
16,13	32,52	16,53	34,16	16,93	35,83	17,33	37,54	17,73	39,29
16,14	32,56	16,54	34,20	16,94	35,87	17,34	37,58	17,74	39,34
16,15	32,60	16,55	34,24	16,95	35,91	17,35	37,63	17,75	39,38
16,16	32,64	16,56	34,28	16,96	35,96	17,36	37,67	17,76	39,43
16,17	32,68	16,57	34,32	16,97	36,00	17,37	37,71	17,77	39,47
16,18	32,72	16,58	34,36	16,98	36,04	17,38	37,76	17,78	39,52
16,19	32,76	16,59	34,40	16,99	36,08	17,39	37,80	17,79	39,56
16,20	32,81	16,60	34,44	17,00	36,13	17,40	37,85	17,80	39,61
16,21	32,85	16,61	34,49	17,01	36,17	17,41	37,89	17,81	39,65
16,22	32,89	16,62	34,53	17,02	36,21	17,42	37,93	17,82	39,69
16,23	32,93	16,63	34,57	17,03	36,25	17,43	37,98	17,83	39,74
16,24	32,97	16,64	34,61	17,04	36,30	17,44	38,02	17,84	39,78
16,25	33,01	16,65	34,65	17,05	36,34	17,45	38,06	17,85	39,83
16,26	33,05	16,66	34,69	17,06	36,38	17,46	38,11	17,86	39,87
16,27	33,09	16,67	34,74	17,07	36,42	17,47	38,15	17,87	39,92
16,28	33,13	16,68	34,78	17,08	36,47	17,48	38,19	17,88	39,96
16,29	33,17	16,69	34,82	17,09	36,51	17,49	38,24	17,89	40,01
16,30	33,21	16,70	34,86	17,10	36,55	17,50	38,28	17,90	40,05
16,31	33,25	16,71	34,90	17,11	36,59	17,51	38,33	17,91	40,10
16,32	33,29	16,72	34,94	17,12	36,64	17,52	38,37	17,92	40,14
16,33	33,33	16,73	34,99	17,13	36,68	17,53	38,41	17,93	40,19
16,34	33,37	16,74	35,03	17,14	36,72	17,54	38,46	17,94	40,23
16,35	33,42	16,75	35,07	17,15	36,77	17,55	38,50	17,95	40,28
16,36	33,46	16,76	35,11	17,16	36,81	17,56	38,54	17,96	40,32
16,37	33,50	16,77	35,15	17,17	36,85	17,57	38,59	17,97	40,37
16,38	33,54	16,78	35,20	17,18	36,89	17,58	38,63	17,98	40,41
16,39	33,58	16,79	35,24	17,19	36,94	17,59	38,68	17,99	40,46
16,40	33,62	16,80	35,28	17,20	36,98	17,60	38,72	18,00	40,50

d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.
18,01	40,55	18,41	42,37	18,81	44,23	19,21	46,13	19,61	48,07
18,02	40,59	18,42	42,41	18,82	44,27	19,22	46,18	19,62	48,12
18,03	40,64	18,43	42,46	18,83	44,32	19,23	46,22	19,63	48,17
18,04	40,68	18,44	42,50	18,84	44,37	19,24	46,27	19,64	48,22
18,05	40,73	18,45	42,55	18,85	44,42	19,25	46,32	19,65	48,27
18,06	40,77	18,46	42,60	18,86	44,46	19,26	46,37	19,66	48,31
18,07	40,82	18,47	42,64	18,87	44,51	19,27	46,42	19,67	48,36
18,08	40,86	18,48	42,69	18,88	44,56	19,28	46,46	19,68	48,41
18,09	40,91	18,49	42,74	18,89	44,60	19,29	46,51	19,69	48,46
18,10	40,95	18,50	42,78	18,90	44,65	19,30	46,56	19,70	48,51
18,11	41,00	18,51	42,83	18,91	44,70	19,31	46,61	19,71	48,56
18,12	41,04	18,52	42,87	18,92	44,75	19,32	46,66	19,72	48,61
18,13	41,09	18,53	42,92	18,93	44,79	19,33	46,71	19,73	48,66
18,14	41,13	18,54	42,97	18,94	44,84	19,34	46,75	19,74	48,71
18,15	41,18	18,55	43,01	18,95	44,89	19,35	46,80	19,75	48,76
18,16	41,22	18,56	43,06	18,96	44,94	19,36	46,85	19,76	48,81
18,17	41,27	18,57	43,11	18,97	44,98	19,37	46,90	19,77	48,86
18,18	41,31	18,58	43,15	18,98	45,03	19,38	46,95	19,78	48,91
18,19	41,36	18,59	43,20	18,99	45,08	19,39	47,00	19,79	48,96
18,20	41,41	18,60	43,25	19,00	45,13	19,40	47,05	19,80	49,01
18,21	41,45	18,61	43,29	19,01	45,17	19,41	47,09	19,81	49,05
18,22	41,50	18,62	43,34	19,02	45,22	19,42	47,14	19,82	49,10
18,23	41,54	18,63	43,38	19,03	45,27	19,43	47,19	19,83	49,15
18,24	41,59	18,64	43,43	19,04	45,32	19,44	47,24	19,84	49,20
18,25	41,63	18,65	43,48	19,05	45,36	19,45	47,29	19,85	49,25
18,26	41,68	18,66	43,52	19,06	45,41	19,46	47,34	19,86	49,30
18,27	41,72	18,67	43,57	19,07	45,46	19,47	47,39	19,87	49,35
18,28	41,77	18,68	43,62	19,08	45,51	19,48	47,43	19,88	49,40
18,29	41,82	18,69	43,66	19,09	45,55	19,49	47,48	19,89	49,45
18,30	41,86	18,70	43,71	19,10	45,60	19,50	47,53	19,90	49,50
18,31	41,91	18,71	43,76	19,11	45,65	19,51	47,58	19,91	49,55
18,32	41,95	18,72	43,80	19,12	45,70	19,52	47,63	19,92	49,60
18,33	42,00	18,73	43,85	19,13	45,74	19,53	47,68	19,93	49,65
18,34	42,04	18,74	43,90	19,14	45,79	19,54	47,73	19,94	49,70
18,35	42,09	18,75	43,95	19,15	45,84	19,55	47,78	19,95	49,75
18,36	42,14	18,76	43,99	19,16	45,89	19,56	47,82	19,96	49,80
18,37	42,18	18,77	44,04	19,17	45,94	19,57	47,87	19,97	49,85
18,38	42,23	18,78	44,09	19,18	45,98	19,58	47,92	19,98	49,90
18,39	42,27	18,79	44,13	19,19	46,03	19,59	47,97	19,99	49,95
18,40	42,32	18,80	44,18	19,20	46,08	19,60	48,02	20,00	50,00

$d.$ Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	$d.$ Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	$d.$ Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	$d.$ Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	$d.$ Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.
20,01	50,05	20,41	52,07	20,81	54,13	21,21	56,23	21,61	58,37
20,02	50,10	20,42	52,12	20,82	54,18	21,22	56,29	21,62	58,43
20,03	50,15	20,43	52,17	20,83	54,24	21,23	56,34	21,63	58,48
20,04	50,20	20,44	52,22	20,84	54,29	21,24	56,39	21,64	58,54
20,05	50,25	20,45	52,28	20,85	54,34	21,25	56,45	21,65	58,59
20,06	50,30	20,46	52,33	20,86	54,39	21,26	56,50	21,66	58,64
20,07	50,35	20,47	52,38	20,87	54,44	21,27	56,55	21,67	58,70
20,08	50,40	20,48	52,43	20,88	54,50	21,28	56,60	21,68	58,75
20,09	50,45	20,49	52,48	20,89	54,55	21,29	56,66	21,69	58,81
20,10	50,50	20,50	52,53	20,90	54,60	21,30	56,71	21,70	58,86
20,11	50,55	20,51	52,58	20,91	54,65	21,31	56,76	21,71	58,92
20,12	50,60	20,52	52,63	20,92	54,71	21,32	56,82	21,72	58,97
20,13	50,65	20,53	52,69	20,93	54,76	21,33	56,87	21,73	59,02
20,14	50,70	20,54	52,74	20,94	54,81	21,34	56,92	21,74	59,08
20,15	50,75	20,55	52,79	20,95	54,86	21,35	56,98	21,75	59,13
20,16	50,80	20,56	52,84	20,96	54,92	21,36	57,03	21,76	59,19
20,17	50,85	20,57	52,89	20,97	54,97	21,37	57,08	21,77	59,24
20,18	50,90	20,58	52,94	20,98	55,02	21,38	57,14	21,78	59,30
20,19	50,95	20,59	52,99	20,99	55,07	21,39	57,19	21,79	59,35
20,20	51,01	20,60	53,05	21,00	55,13	21,40	57,25	21,80	59,41
20,21	51,06	20,61	53,10	21,01	55,18	21,41	57,30	21,81	59,46
20,22	51,11	20,62	53,15	21,02	55,23	21,42	57,35	21,82	59,51
20,23	51,16	20,63	53,20	21,03	55,28	21,43	57,41	21,83	59,57
20,24	51,21	20,64	53,25	21,04	55,34	21,44	57,46	21,84	59,62
20,25	51,26	20,65	53,30	21,05	55,39	21,45	57,51	21,85	59,68
20,26	51,31	20,66	53,35	21,06	55,44	21,46	57,57	21,86	59,73
20,27	51,36	20,67	53,41	21,07	55,49	21,47	57,62	21,87	59,79
20,28	51,41	20,68	53,46	21,08	55,55	21,48	57,67	21,88	59,84
20,29	51,46	20,69	53,51	21,09	55,60	21,49	57,73	21,89	59,90
20,30	51,51	20,70	53,56	21,10	55,65	21,50	57,78	21,90	59,95
20,31	51,56	20,71	53,61	21,11	55,70	21,51	57,84	21,91	60,01
20,32	51,61	20,72	53,66	21,12	55,76	21,52	57,89	21,92	60,06
20,33	51,66	20,73	53,72	21,13	55,81	21,53	57,94	21,93	60,12
20,34	51,71	20,74	53,77	21,14	55,86	21,54	58,00	21,94	60,17
20,35	51,77	20,75	53,82	21,15	55,92	21,55	58,05	21,95	60,23
20,36	51,82	20,76	53,87	21,16	55,97	21,56	58,10	21,96	60,28
20,37	51,87	20,77	53,92	21,17	56,02	21,57	58,16	21,97	60,34
20,38	51,92	20,78	53,98	21,18	56,07	21,58	58,21	21,98	60,39
20,39	51,97	20,79	54,03	21,19	56,13	21,59	58,27	21,99	60,45
20,40	52,02	20,80	54,08	21,20	56,18	21,60	58,32	22,00	60,50

d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.	d. Meter.	$\frac{d^2}{8}$. □ Meter.
22,01	60,56	22,41	62,78	22,81	65,04	23,21	67,34	23,61	69,68
22,02	60,61	22,42	62,83	22,82	65,09	23,22	67,40	23,62	69,74
22,03	60,67	22,43	62,89	22,83	65,15	23,23	67,45	23,63	69,80
22,04	60,72	22,44	62,94	22,84	65,21	23,24	67,51	23,64	69,86
22,05	60,78	22,45	63,00	22,85	65,27	23,25	67,57	23,65	69,92
22,06	60,83	22,46	63,06	22,86	65,32	23,26	67,63	23,66	69,97
22,07	60,89	22,47	63,11	22,87	65,38	23,27	67,69	23,67	70,03
22,08	60,94	22,48	63,17	22,88	65,44	23,28	67,74	23,68	70,09
22,09	61,00	22,49	63,23	22,89	65,49	23,29	67,80	23,69	70,15
22,10	61,05	22,50	63,28	22,90	65,55	23,30	67,86	23,70	70,21
22,11	61;11	22,51	63,34	22,91	65,61	23,31	67,92	23,71	70,27
22,12	61,16	22,52	63,39	22,92	65,67	23,32	67,98	23,72	70,33
22,13	61,22	22,53	63,45	22,93	65,72	23,33	68,04	23,73	70,39
22,14	61,27	22,54	63,51	22,94	65,78	23,34	68,09	23,74	70,45
22,15	61,33	22,55	63,56	22,95	65,84	23,35	68,15	23,75	70,51
22,16	61,38	22,56	63,62	22,96	65,90	23,36	68,21	23,76	70,57
22,17	61,44	22,57	63,68	22,97	65,95	23,37	68,27	23,77	70,63
22,18	61,49	22,58	63,73	22,98	66,01	23,38	68,33	23,78	70,69
22,19	61,55	22,59	63,79	22,99	66,07	23,39	68,39	23,79	70,75
22,20	61,61	22,60	63,85	23,00	66,13	23,40	68,45	23,80	70,81
22,21	61,66	22,61	63,90	23,01	66,18	23,41	68,50	23,81	70,86
22,22	61,72	22,62	63,96	23,02	66,24	23,42	68,56	23,82	70,92
22,23	61,77	22,63	64,01	23,03	66,30	23,43	68,62	23,83	70,98
22,24	61,83	22,64	64,07	23,04	66,36	23,44	68,68	23,84	71,04
22,25	61,88	22,65	64,13	23,05	66,41	23,45	68,74	23,85	71,10
22,26	61,94	22,66	64,18	23,06	66,47	23,46	68,80	23,86	71,16
22,27	61,99	22,67	64,24	23,07	66,53	23,47	68,86	23,87	71,22
22,28	62,05	22,68	64,30	23,08	66,59	23,48	68,91	23,88	71,28
22,29	62,11	22,69	64,35	23,09	66,64	23,49	68,97	23,89	71,34
22,30	62,16	22,70	64,41	23,10	66,70	23,50	69,03	23,90	71,40
22,31	62,22	22,71	64,47	23,11	66,76	23,51	69,09	23,91	71,46
22,32	62,27	22,72	64,52	23,12	66,82	23,52	69,15	23,92	71,52
22,33	62,33	22,73	64,58	23,13	66,87	23,53	69,21	23,93	71,58
22,34	62,38	22,74	64,64	23,14	66,93	23,54	69,27	23,94	71,64
22,35	62,44	22,75	64,70	23,15	66,99	23,55	69,33	23,95	71,70
22,36	62,50	22,76	64,75	23,16	67,05	23,56	69,38	23,96	71,76
22,37	62,55	22,77	64,81	23,17	67,11	23,57	69,44	23,97	71,82
22,38	62,61	22,78	64,87	23,18	67,16	23,58	69,50	23,98	71,88
22,39	62,66	22,79	64,92	23,19	67,22	23,59	69,56	23,99	71,94
22,40	62,72	22,80	64,98	23,20	67,28	23,60	69,62	24,00	72,00

il II.)



I.)

R

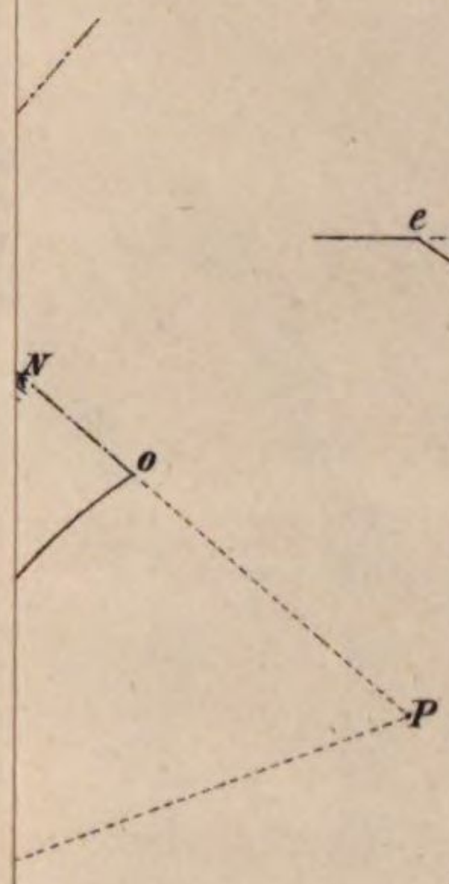


Fig. 3a.
(Profil A)

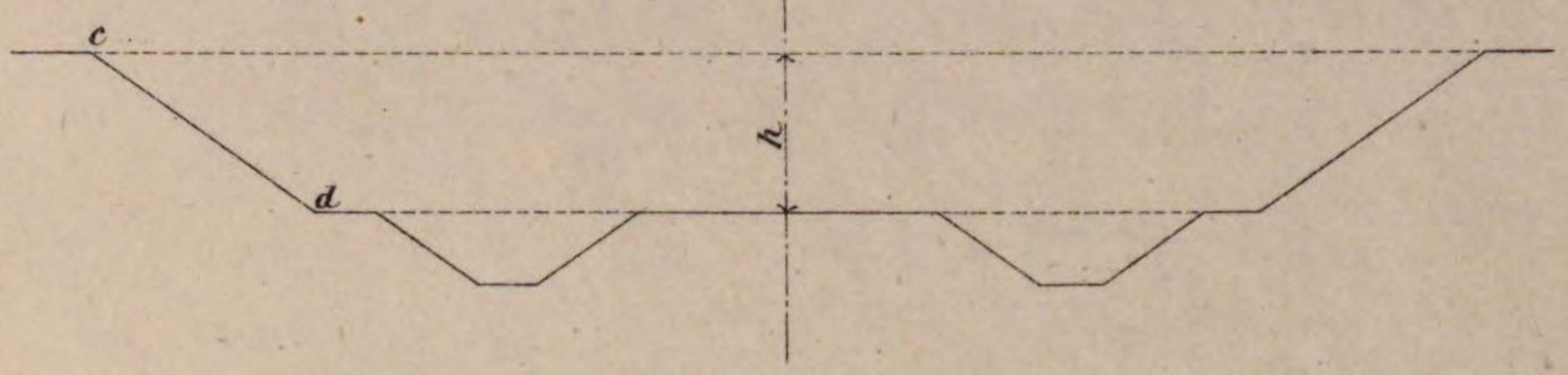


Fig. 3b.
(Profil B.)

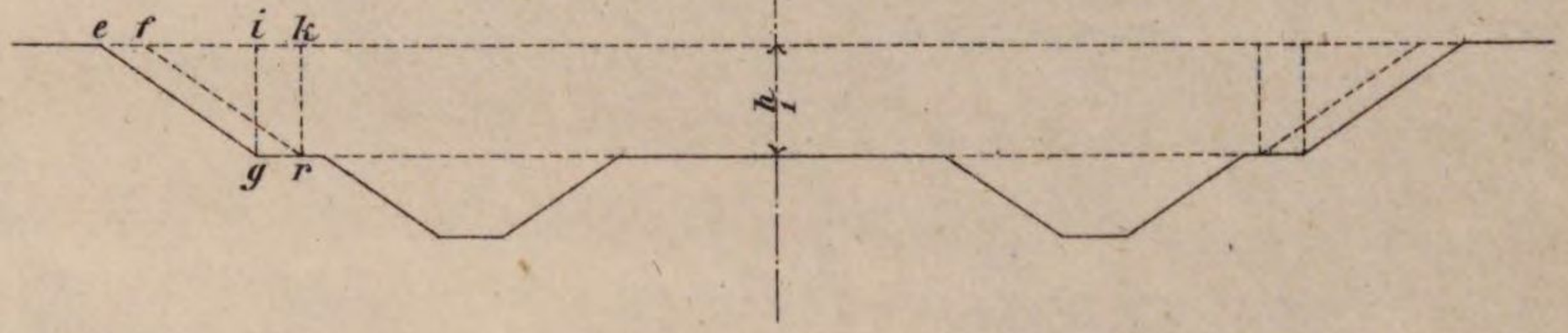
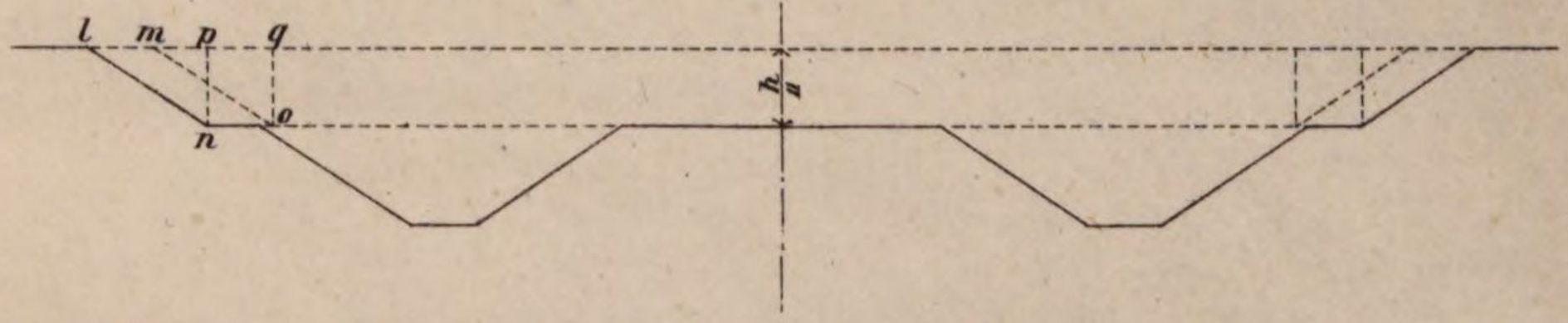


Fig. 3c
(Profil C.)



ig. 5.

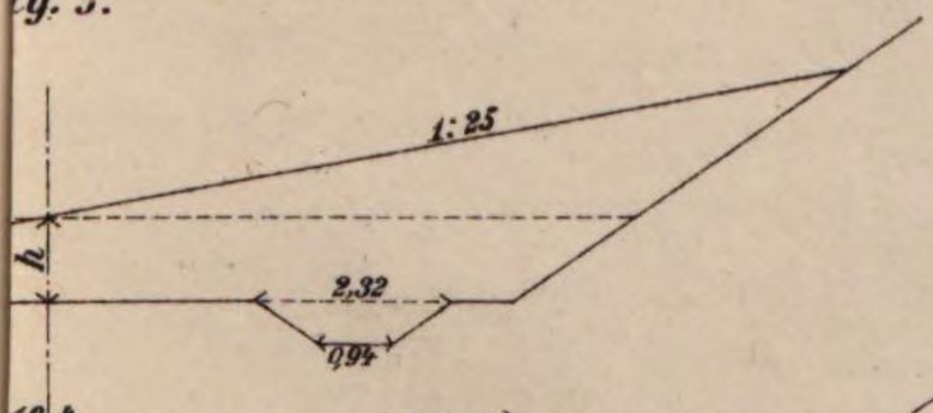
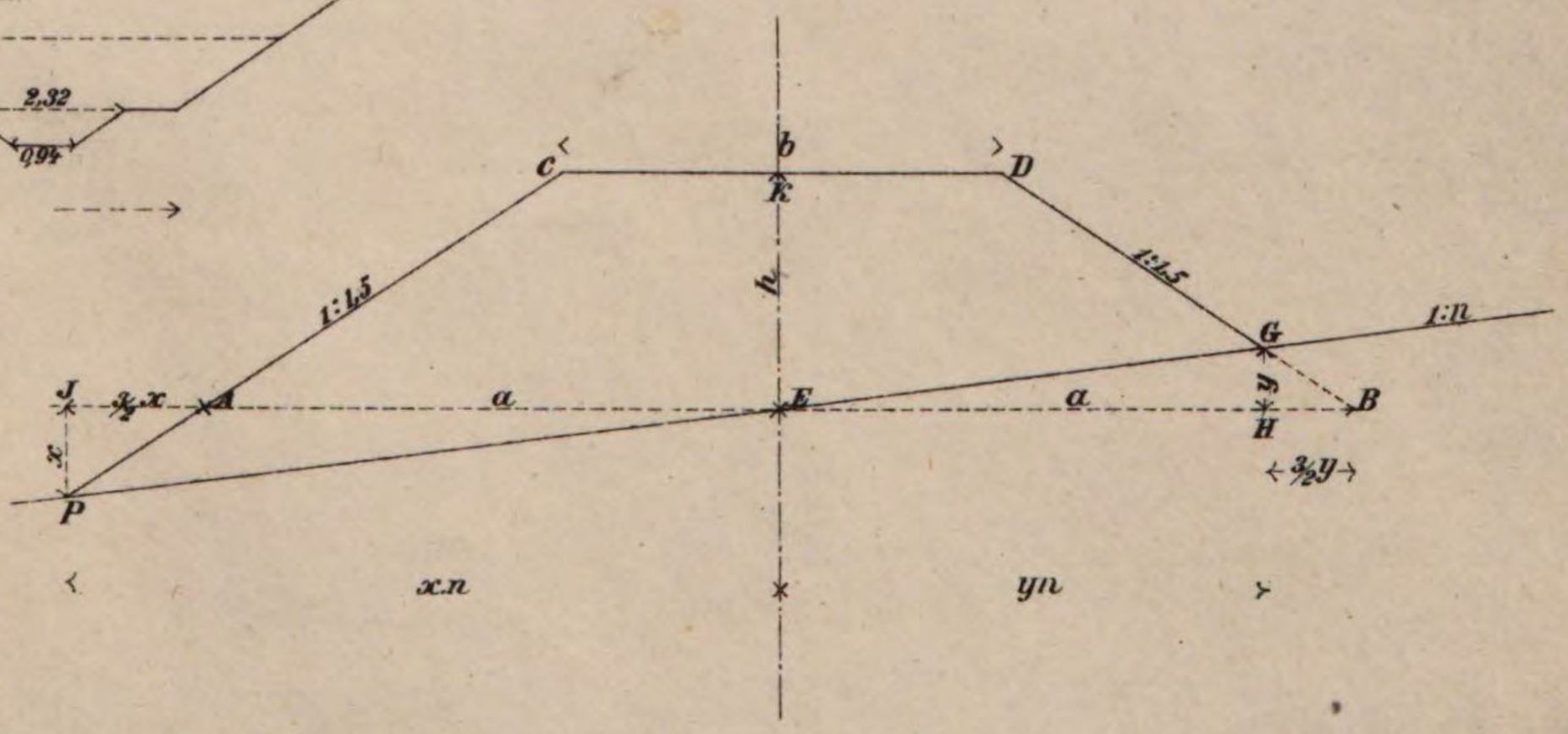


Fig. 4.



ipzig.

Fig. 10.

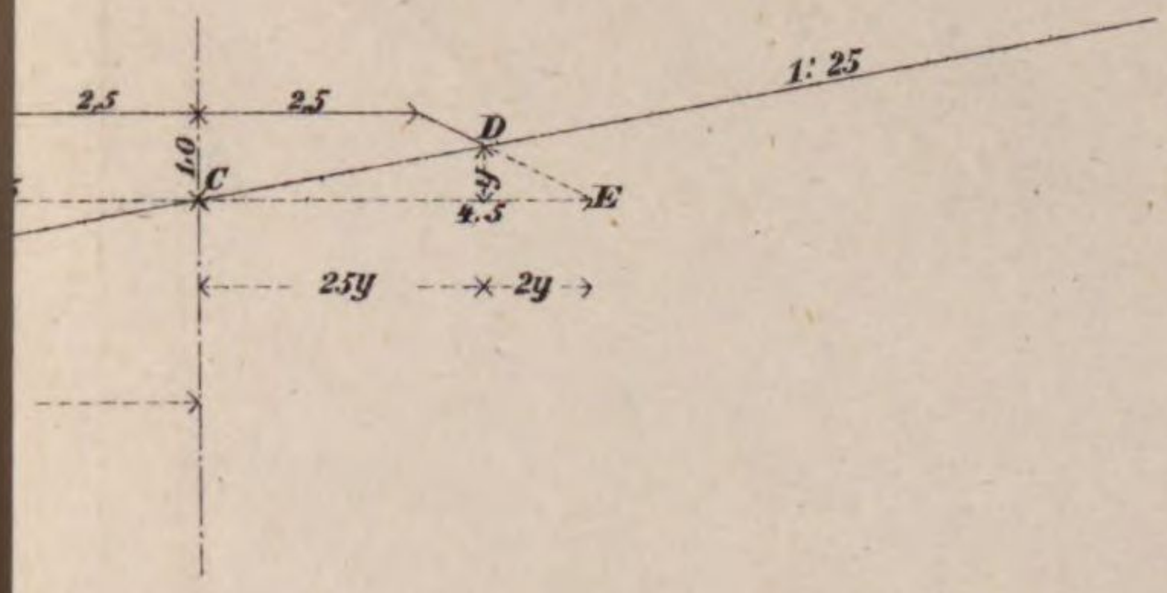


Fig. 11.

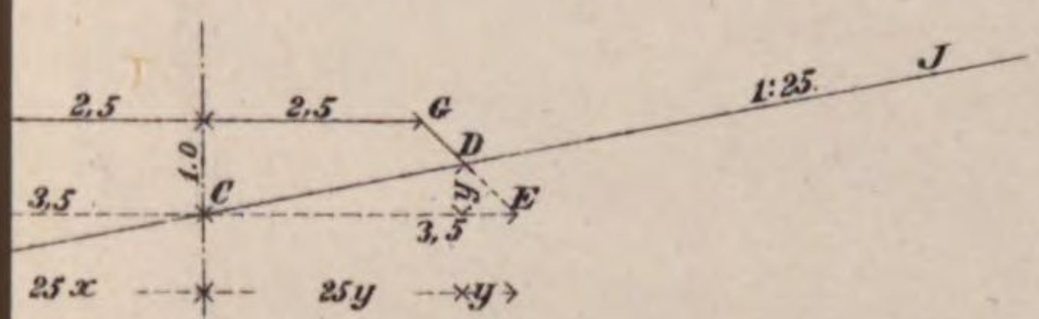


Fig. 12 c.

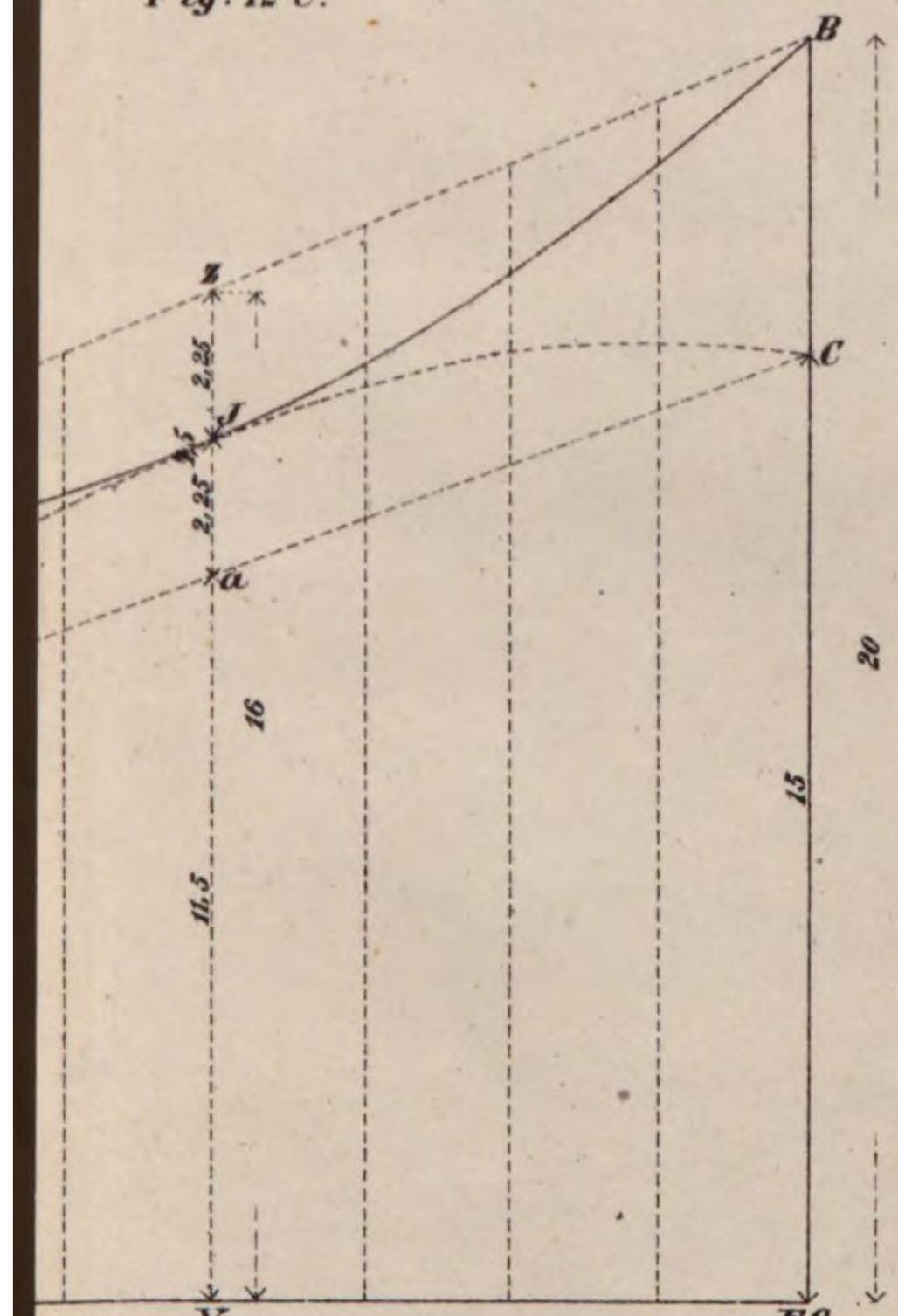


Fig. 12 a
(Aufriss.)

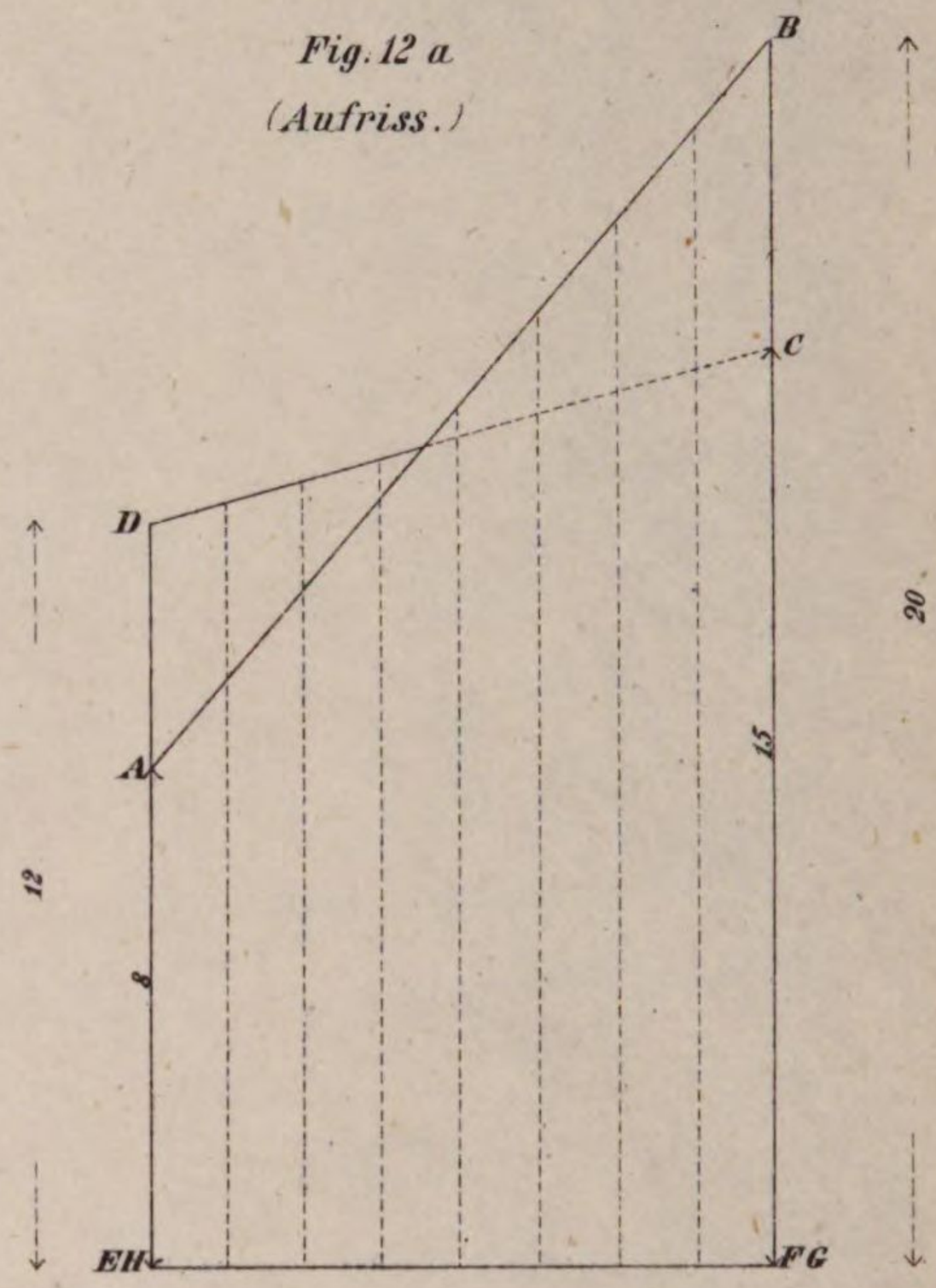
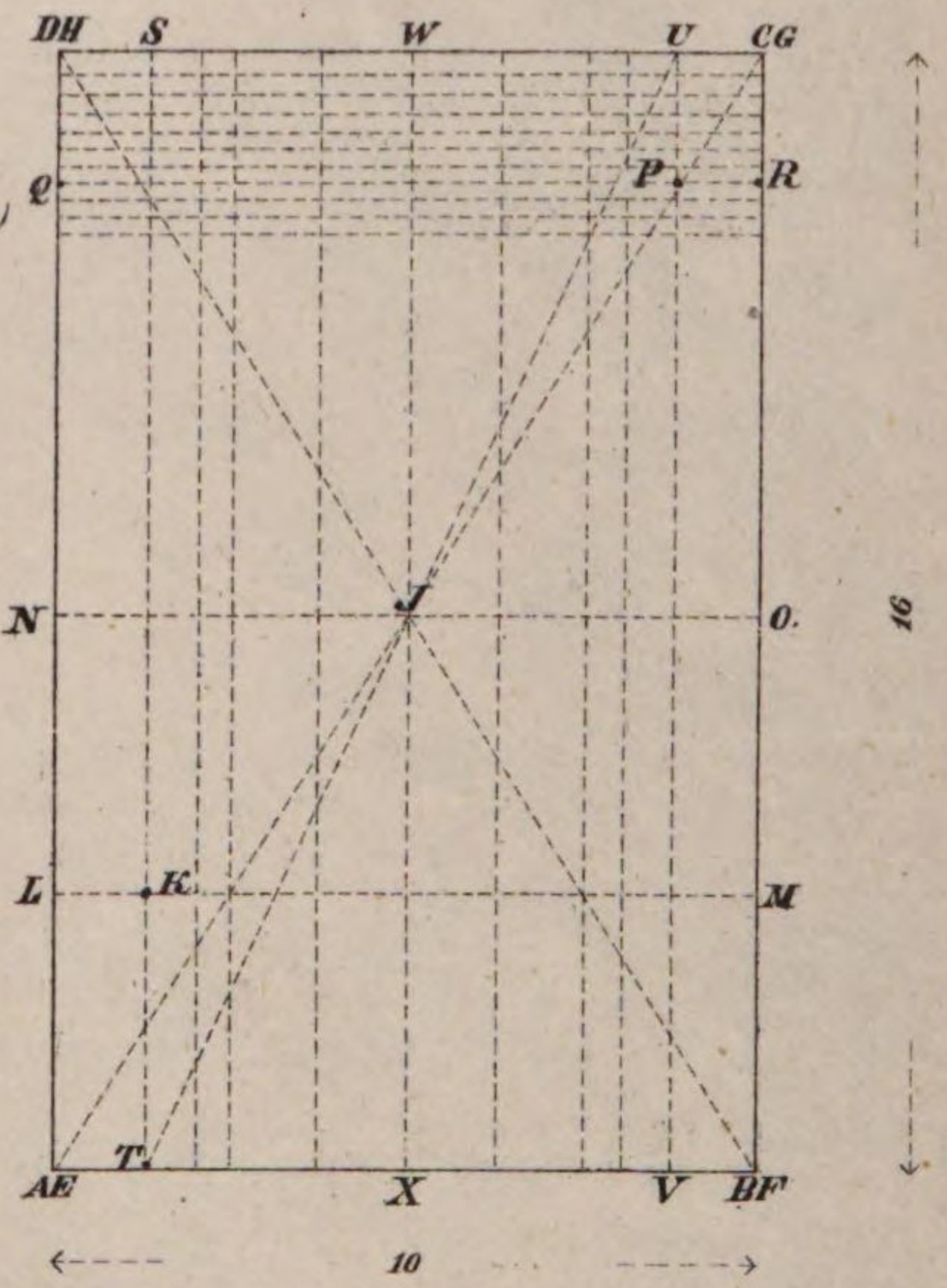


Fig. 12 b
(Grundriss.)



h & Schaefer, Leipzig.

k-g >

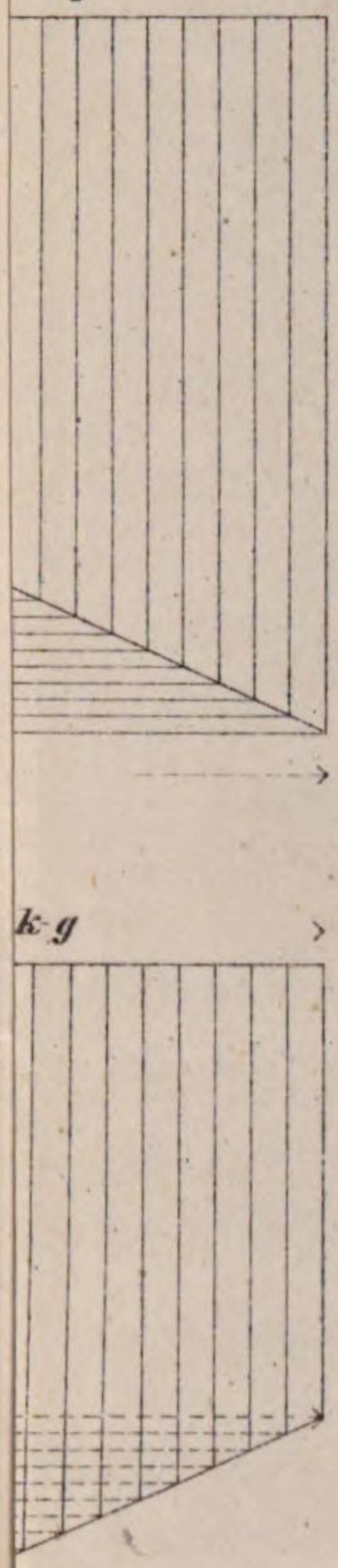


Fig. 20.

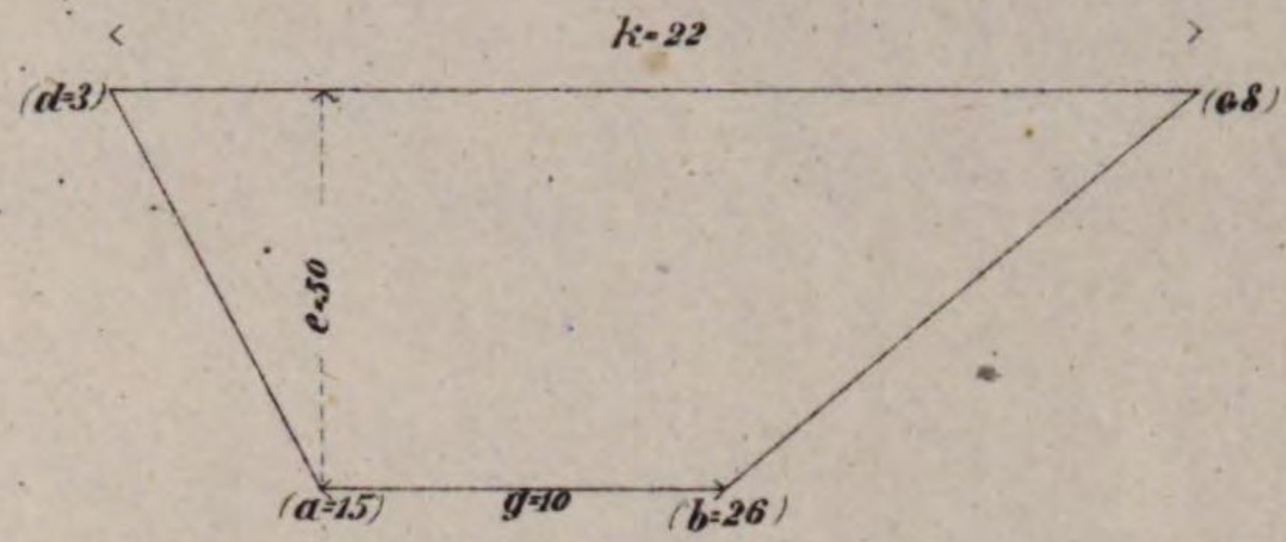


Fig. 21.

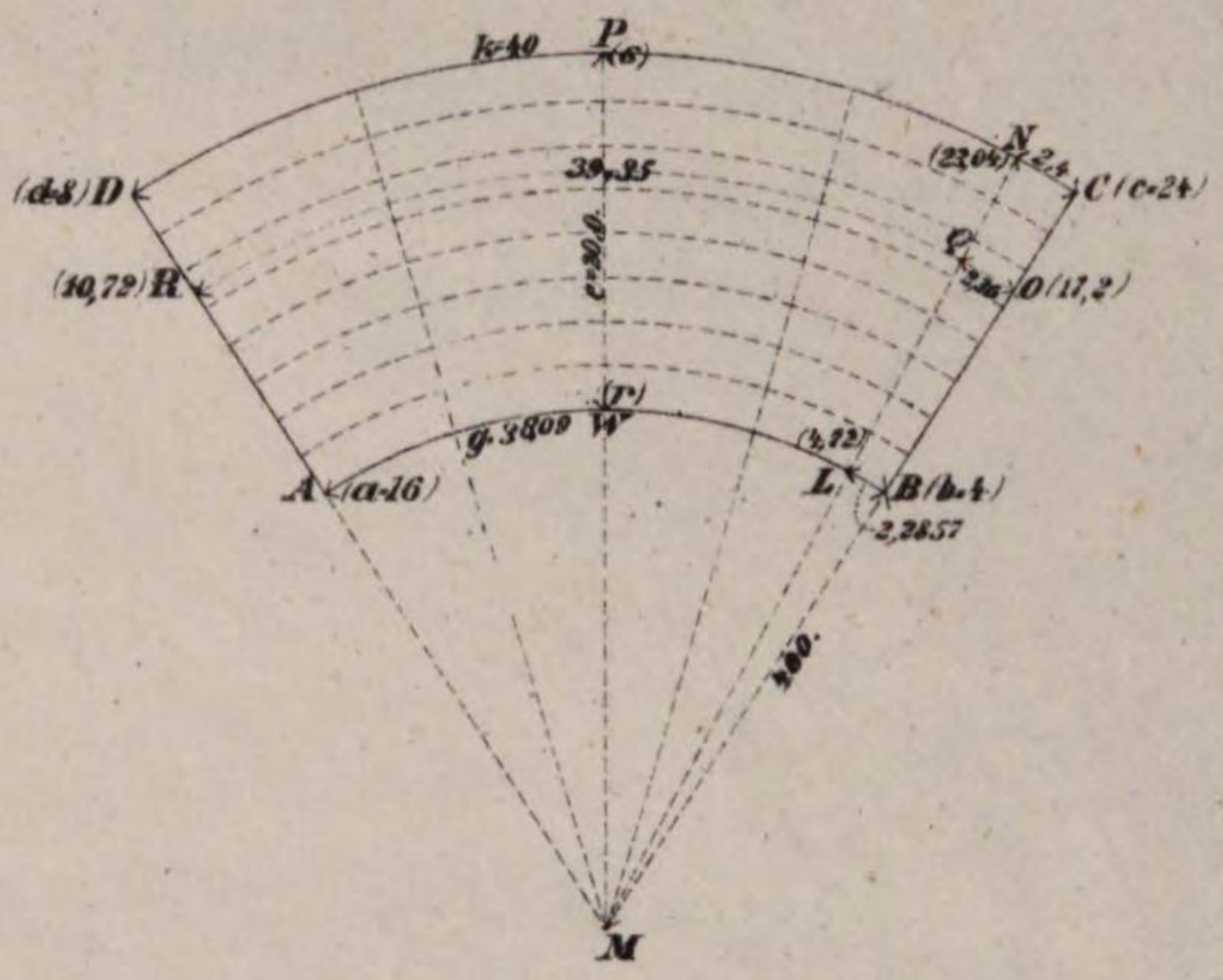


Fig. 22.

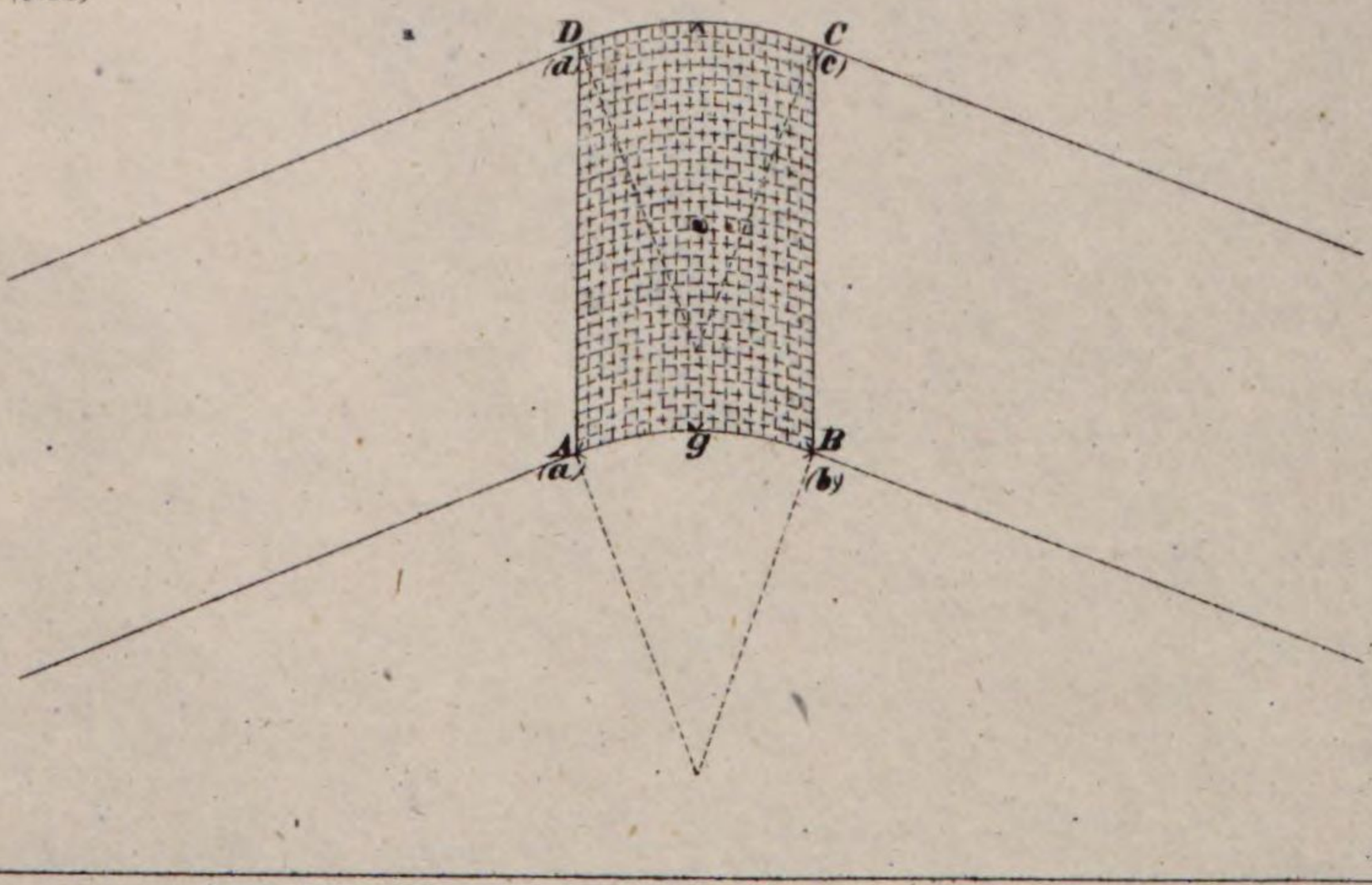


Fig. 24 a.

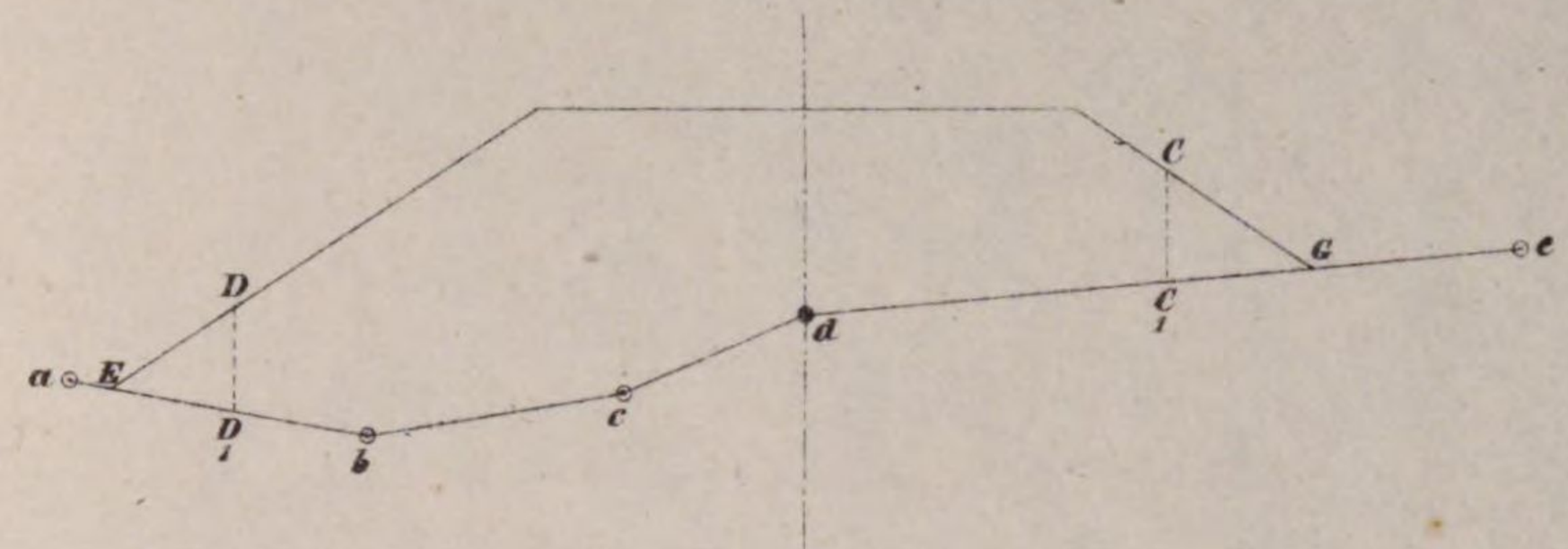


Fig 24 b.

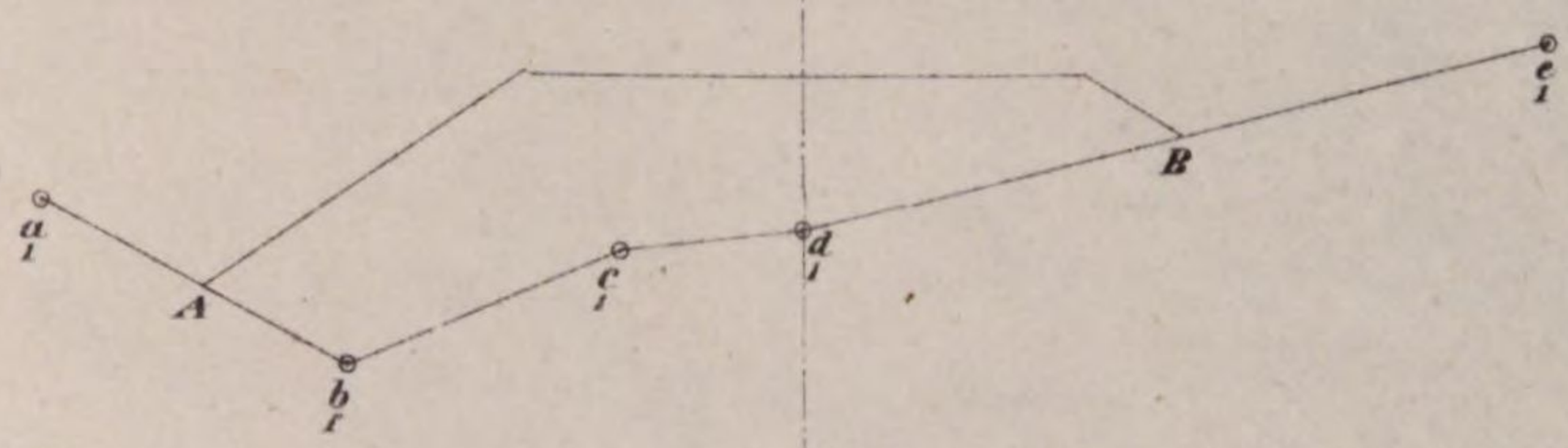
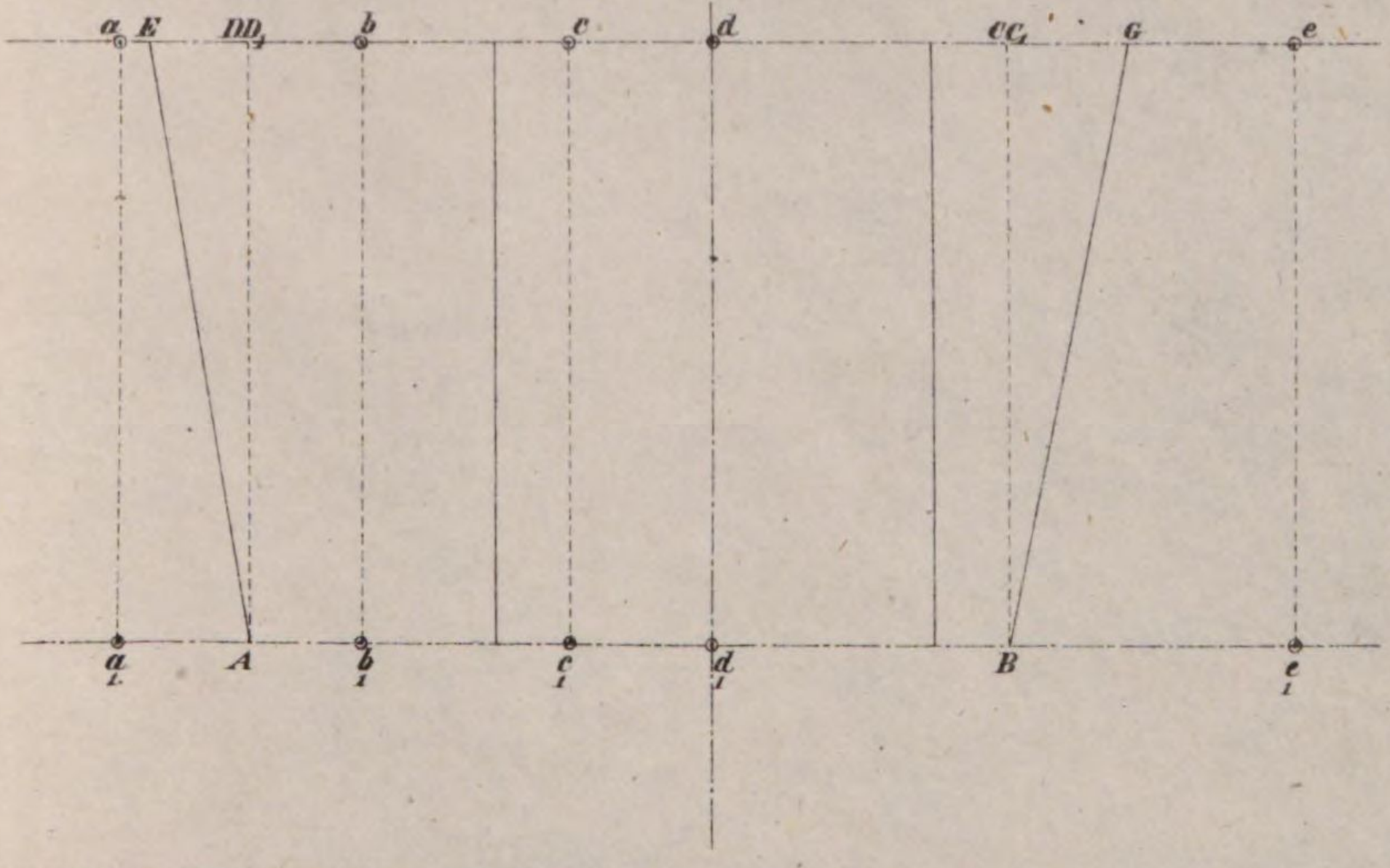


Fig. 24.c.



pzig.

Fig. 26 a.

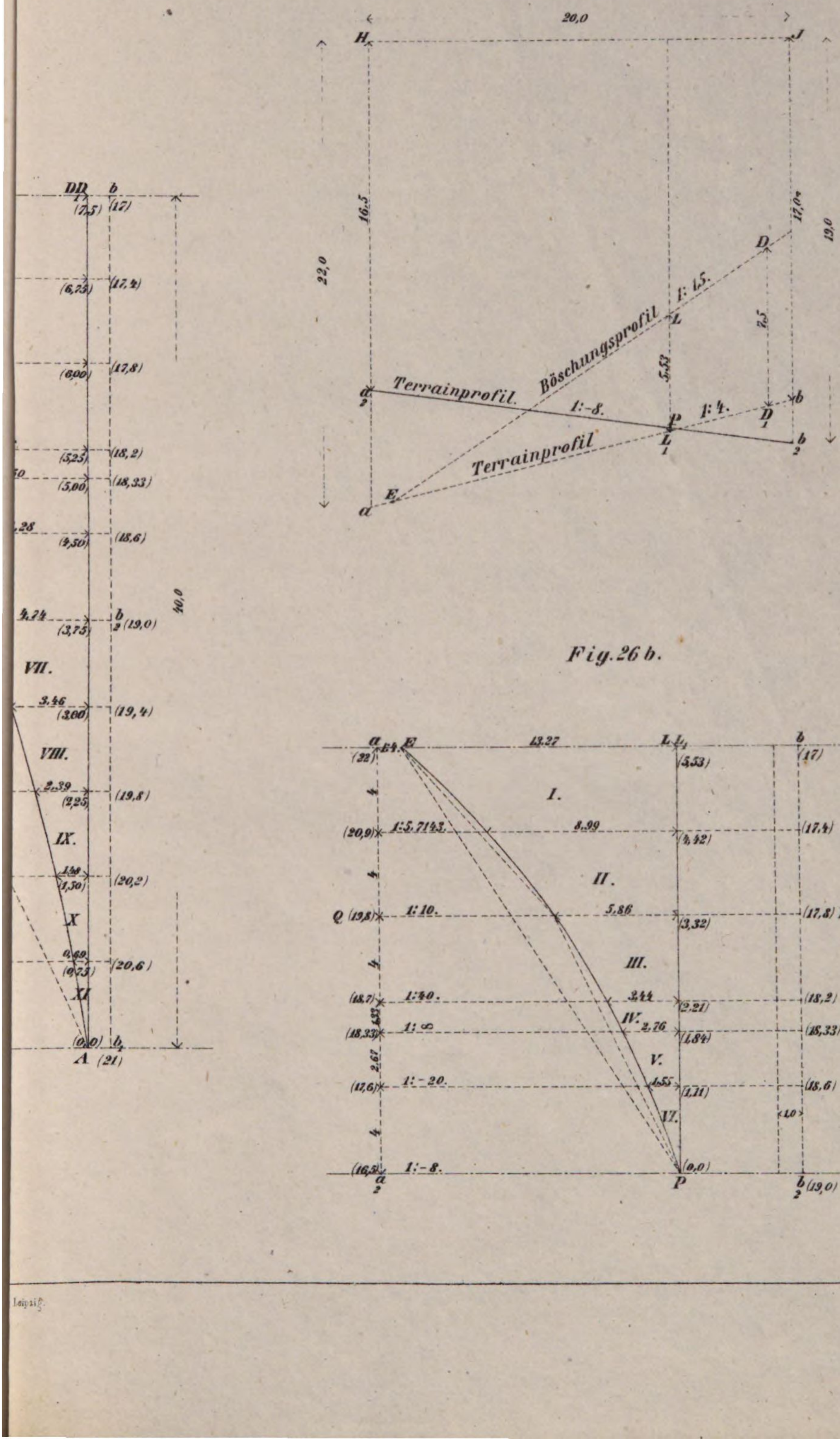
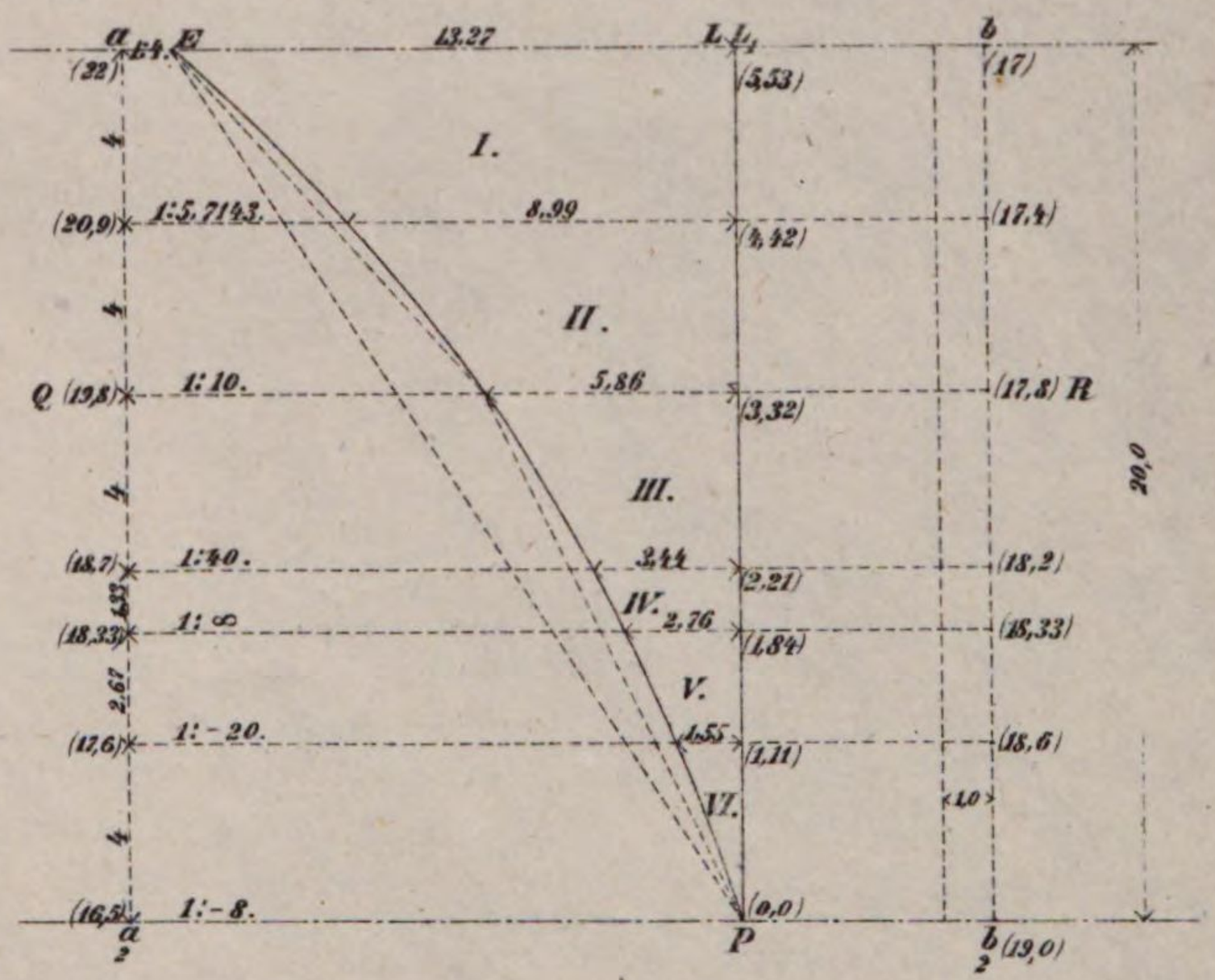


Fig. 26 b.



Leipzig.

Fig. 29a.

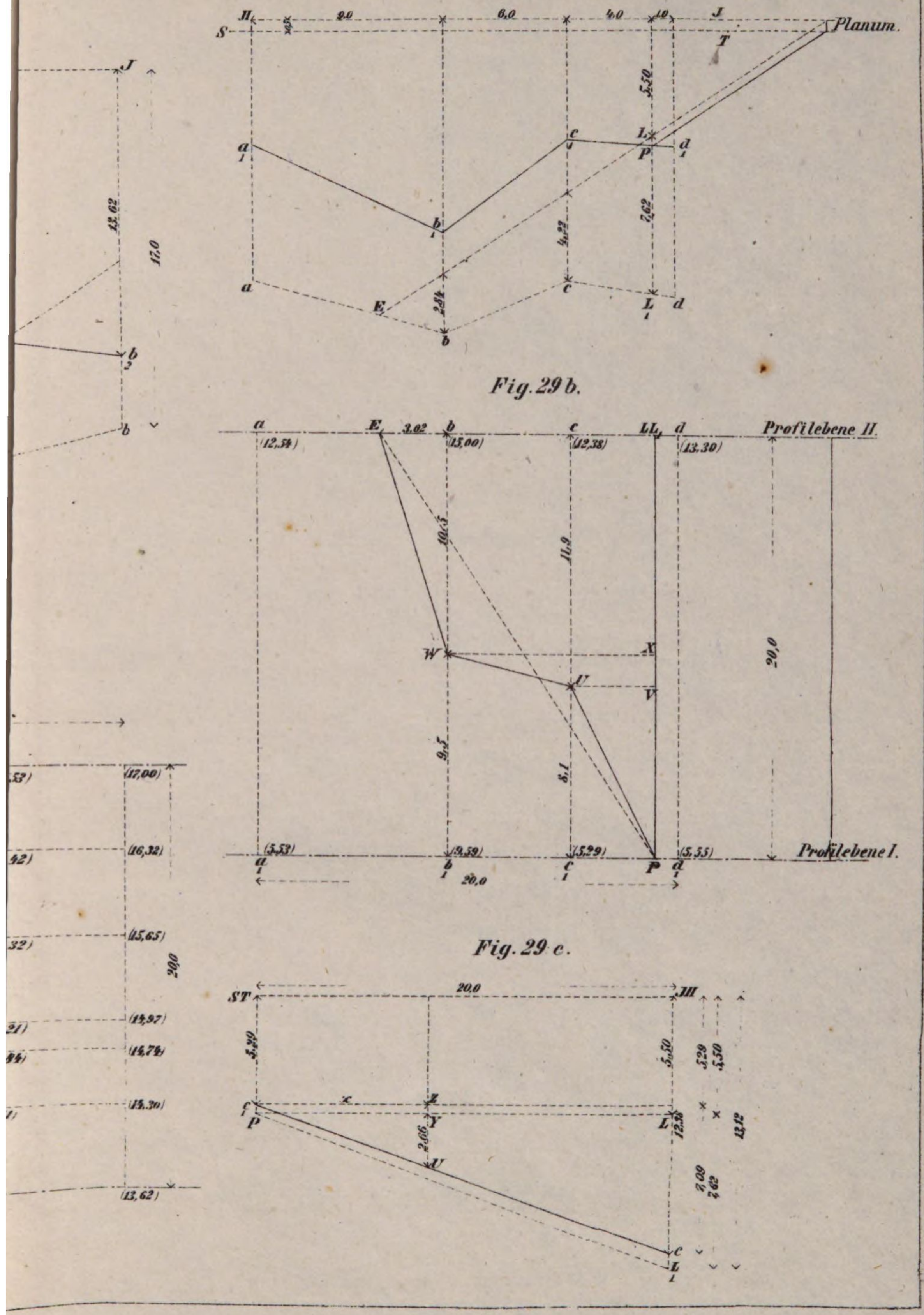


Fig. 29b.

Fig. 29c.

Fig. 31a. (Profil II.)

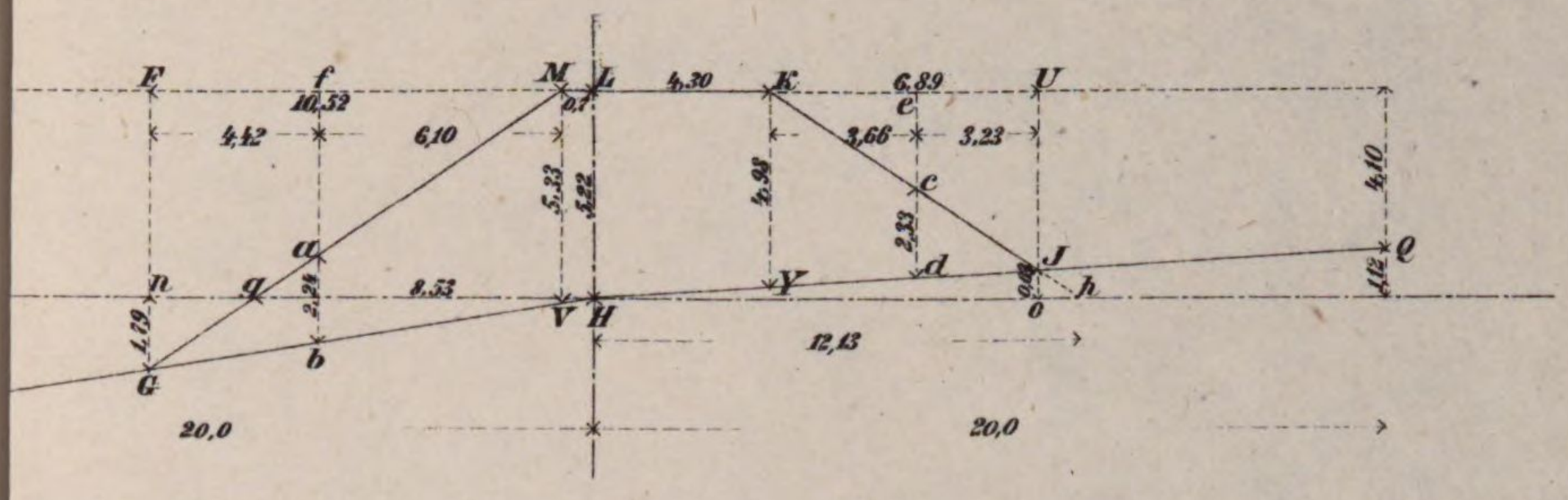


Fig. 31b. (Profil I.)

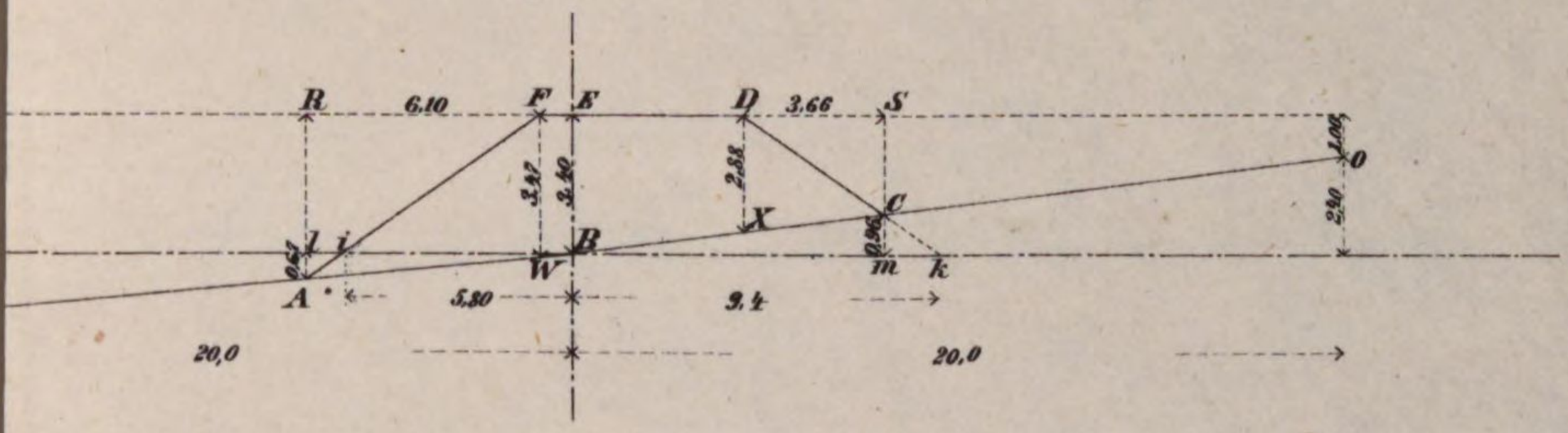
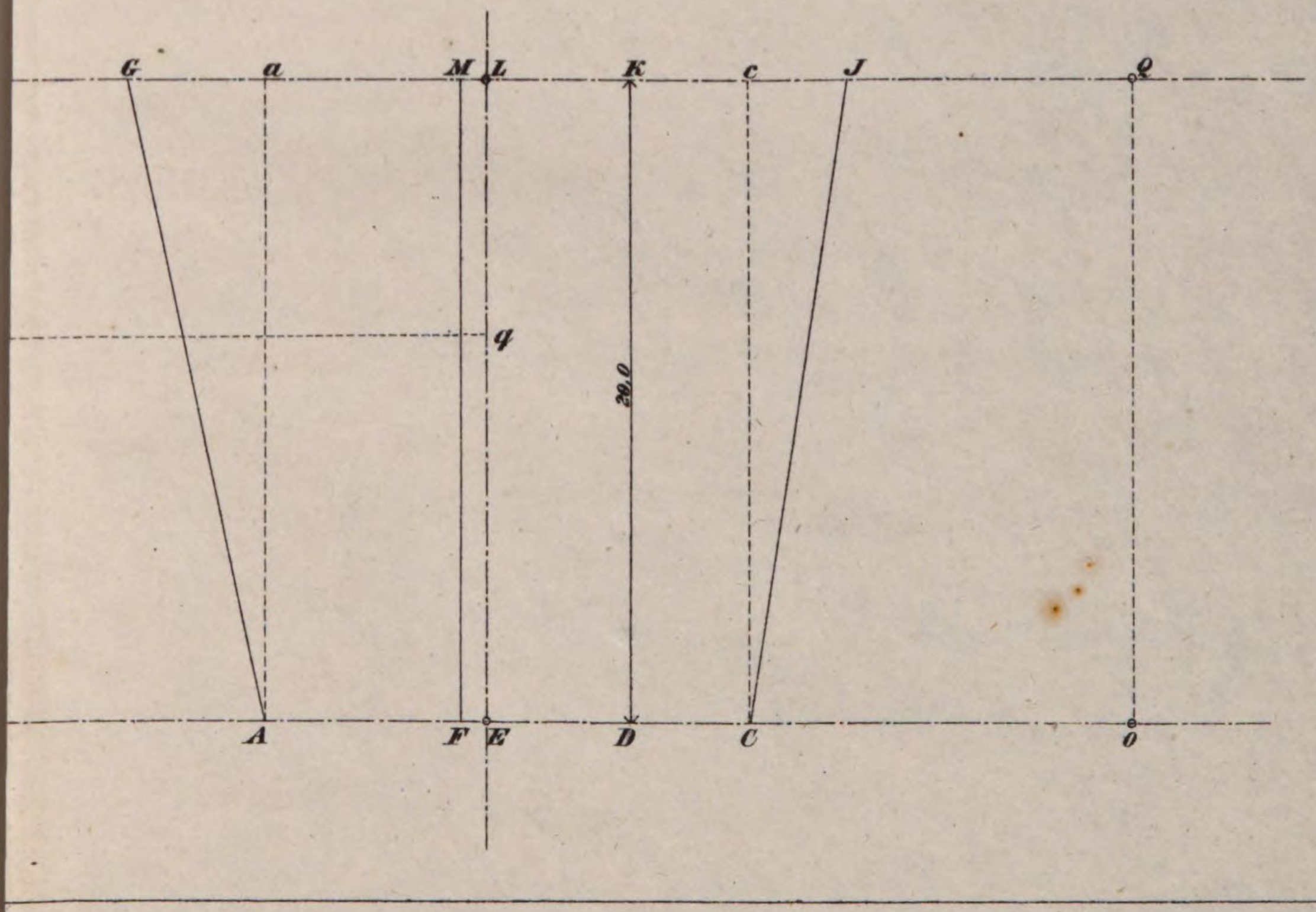


Fig. 31c.



ipzig.

Fig. 33a.(Profil II.)

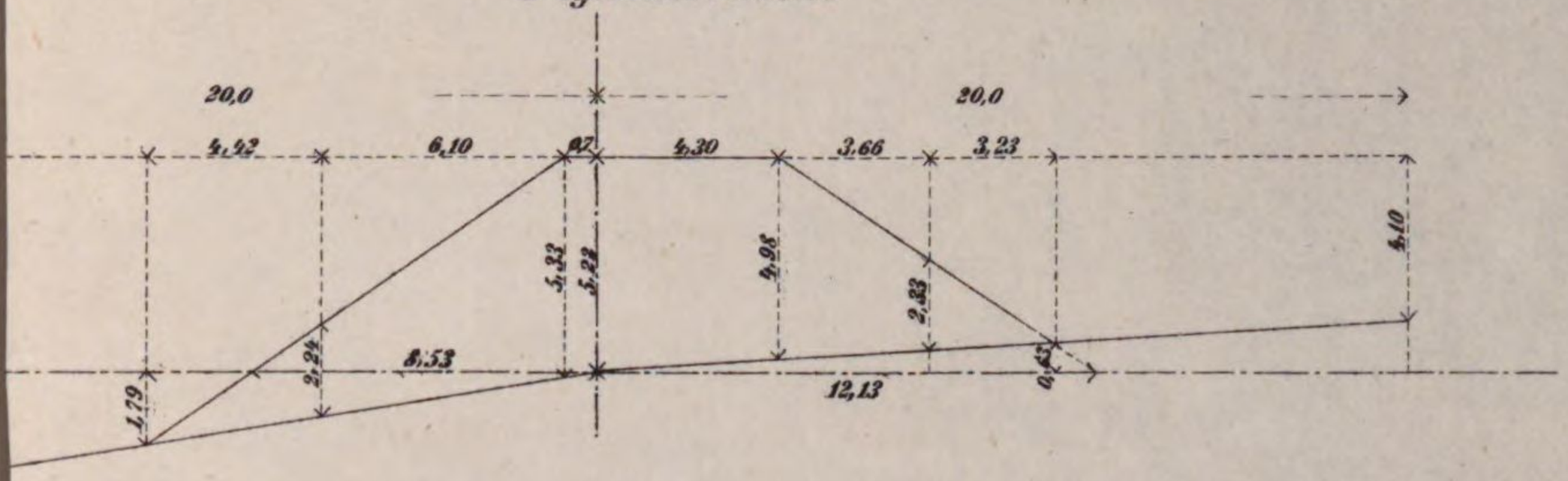
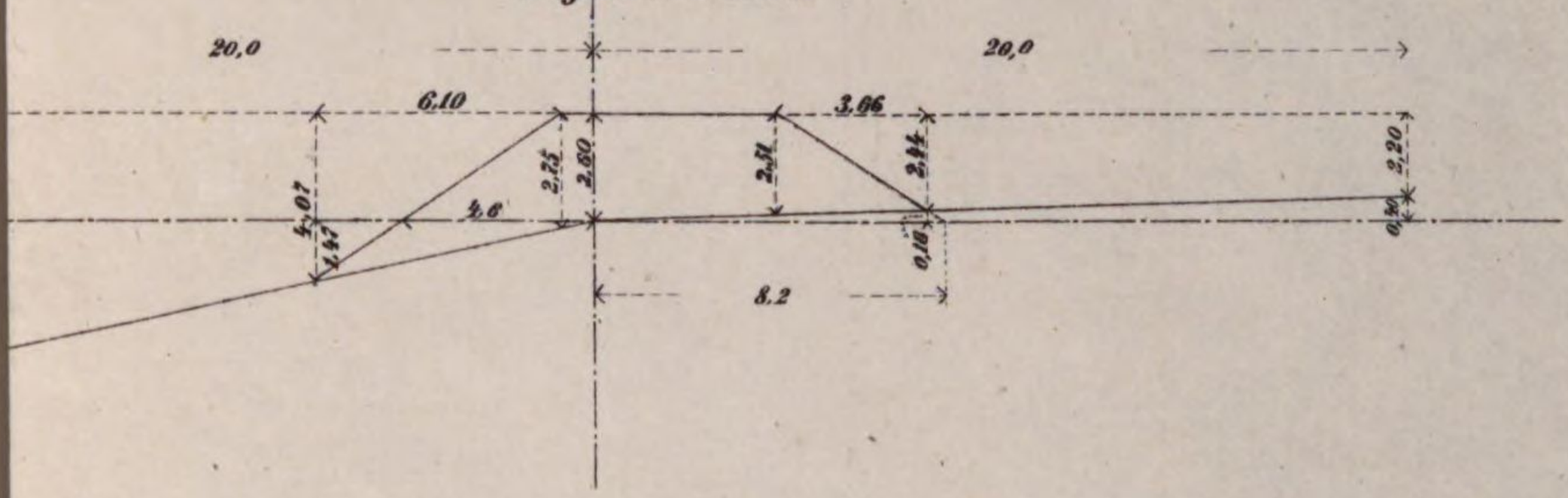


Fig. 33b.(Profil I.)



d.

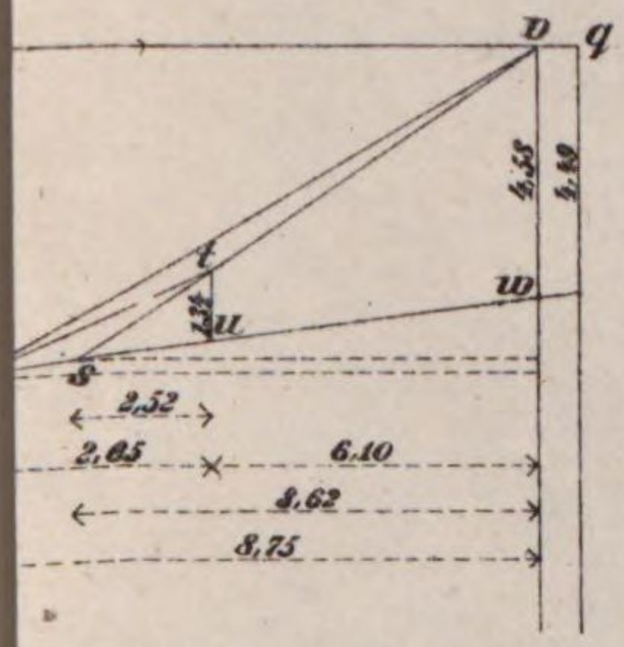


Fig.34a.(Profil II.)

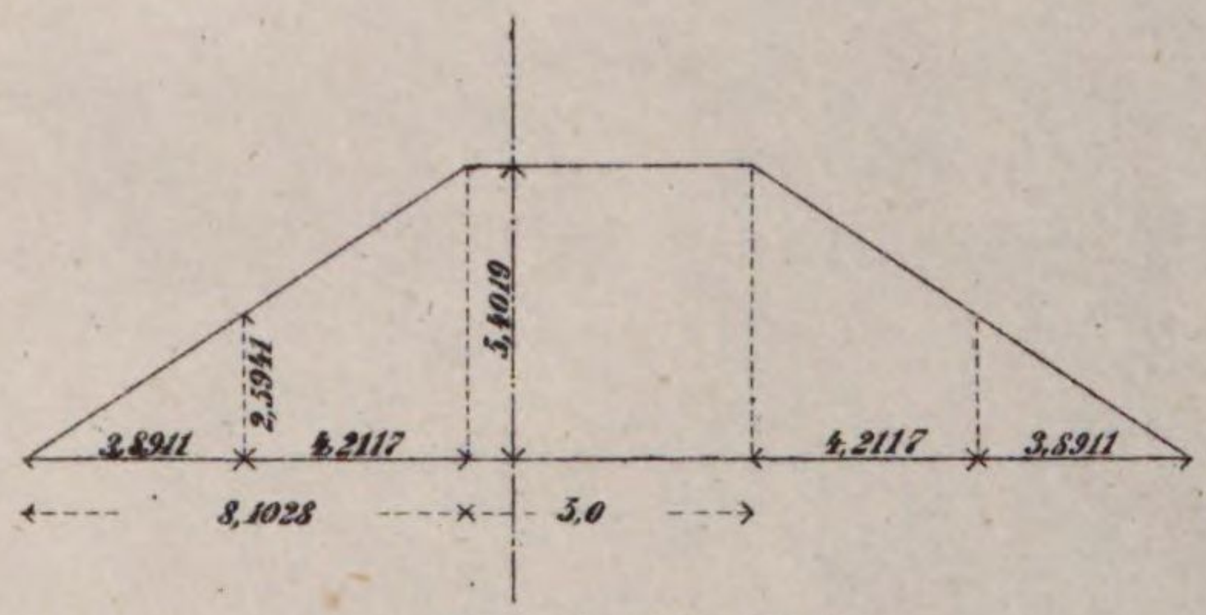
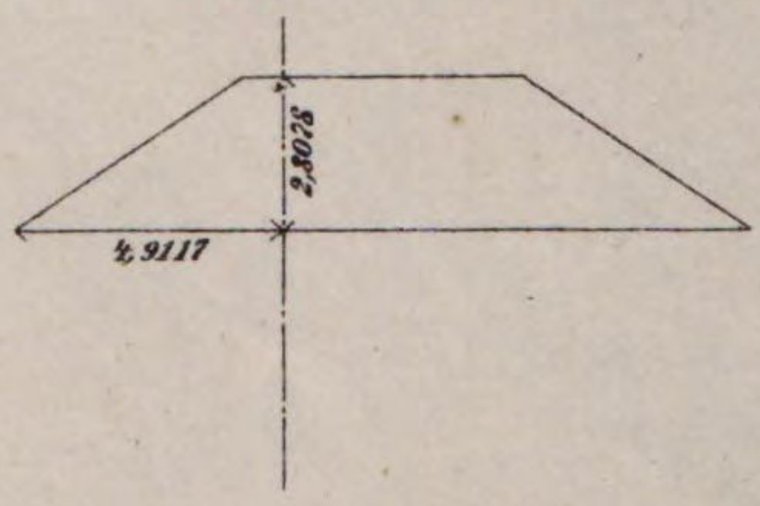


Fig.34b (Profil I.)



uiß.

Fig.35a (Profil II.)

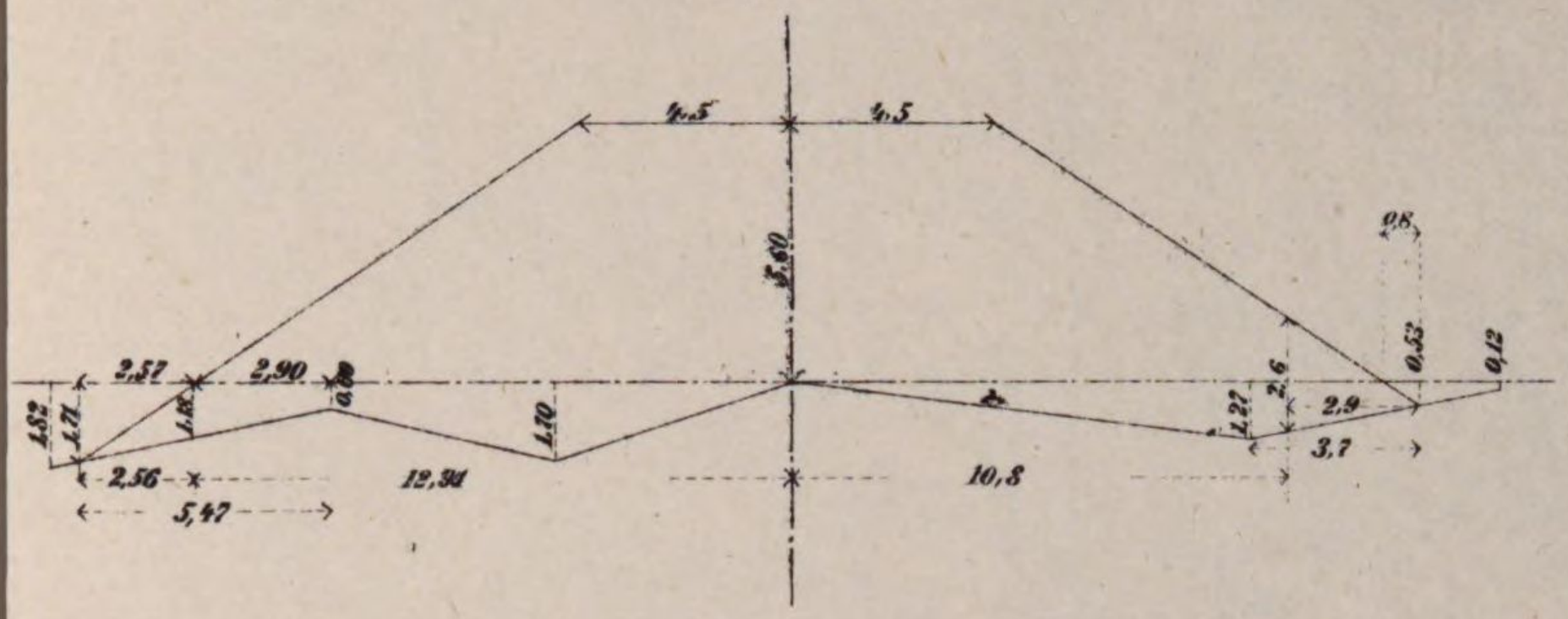


Fig. 35b (Profil I.)

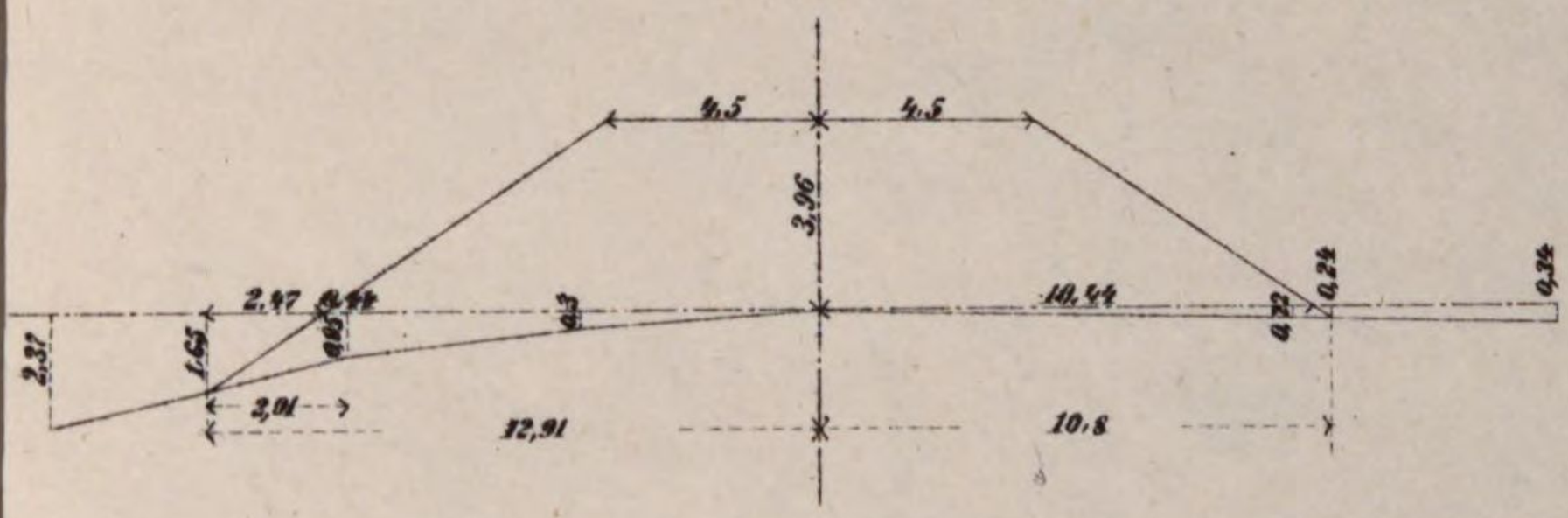


Fig. 35c.

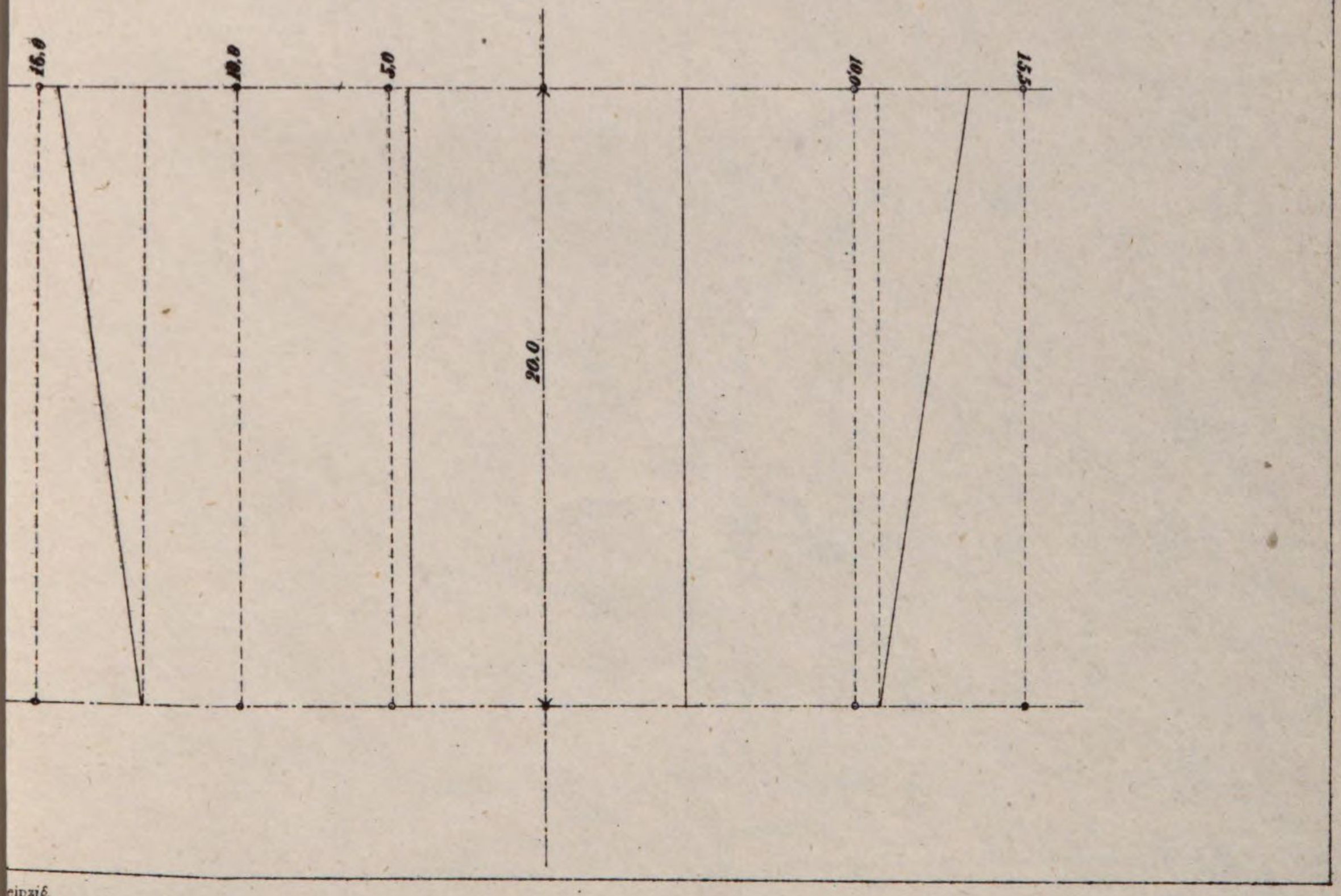


Fig. 38.

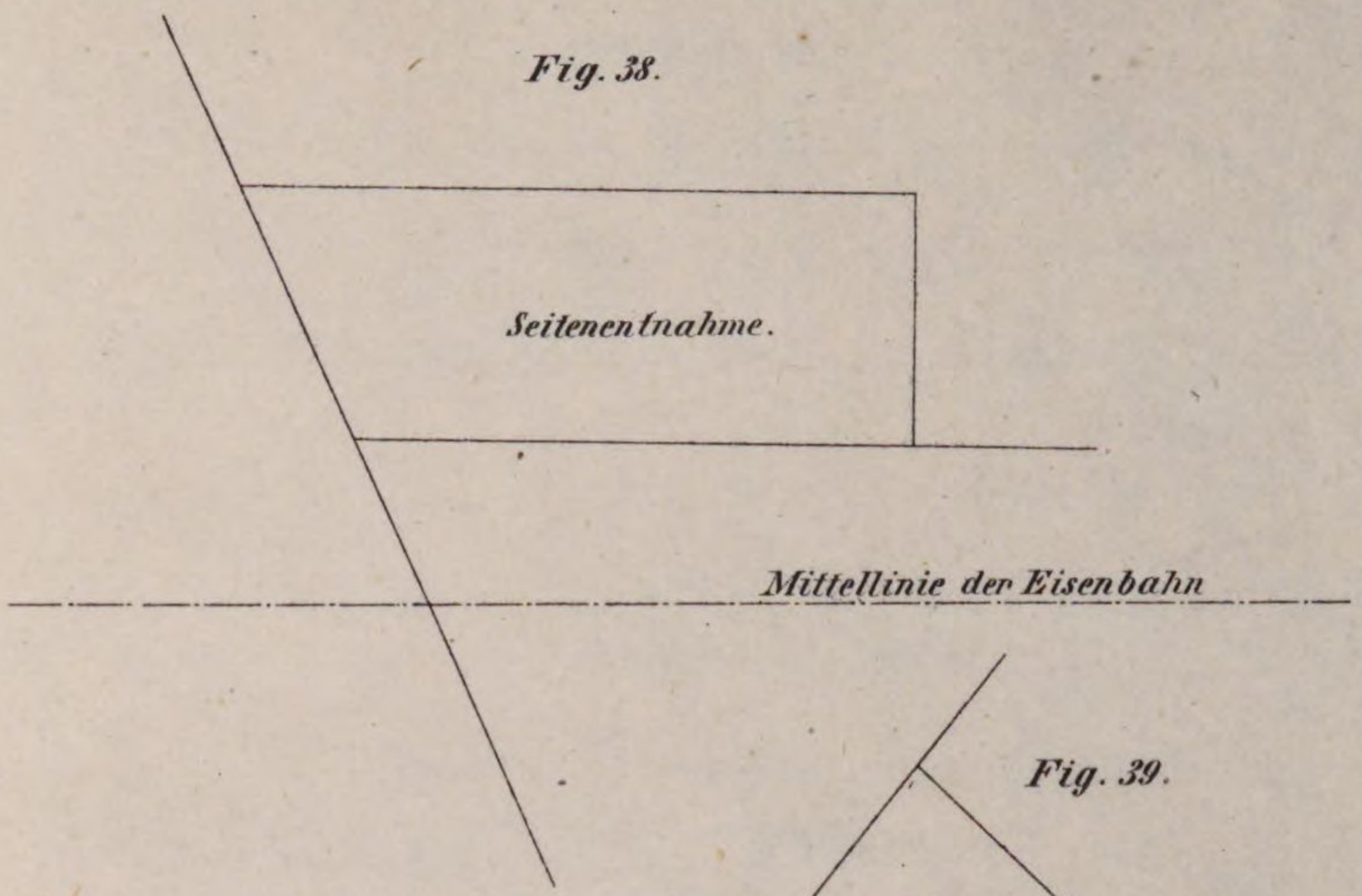


Fig. 39.

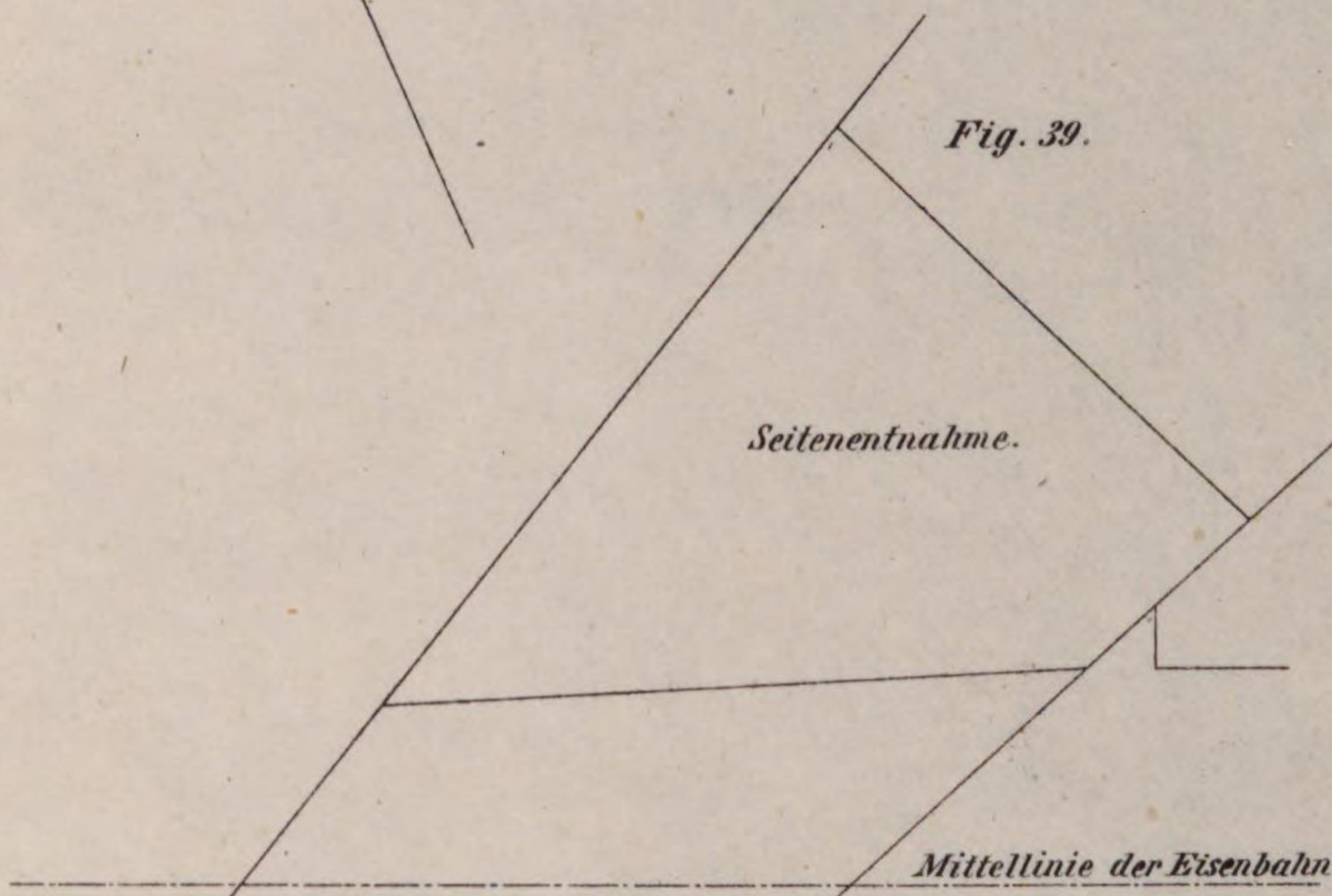


Fig. 40.

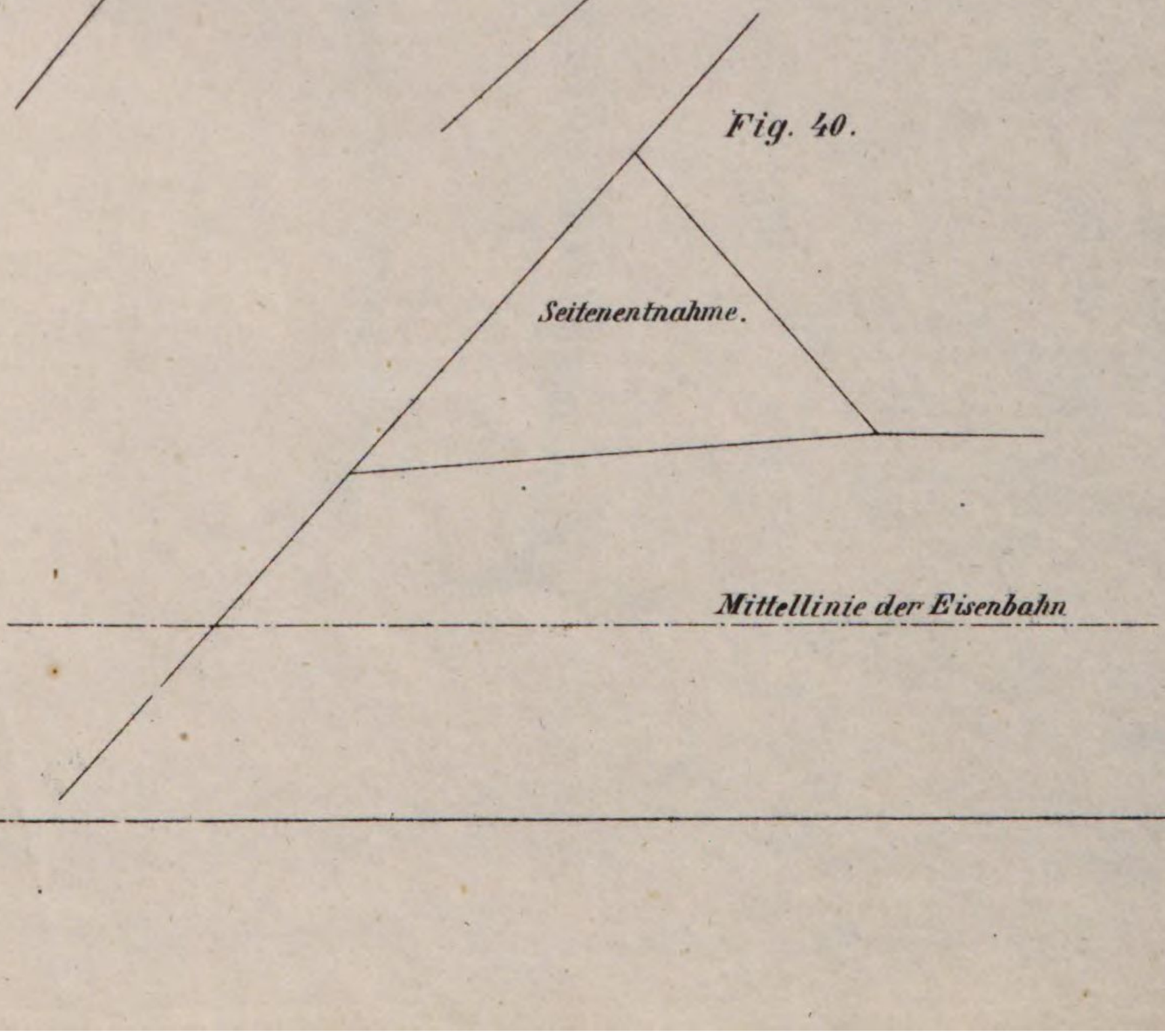
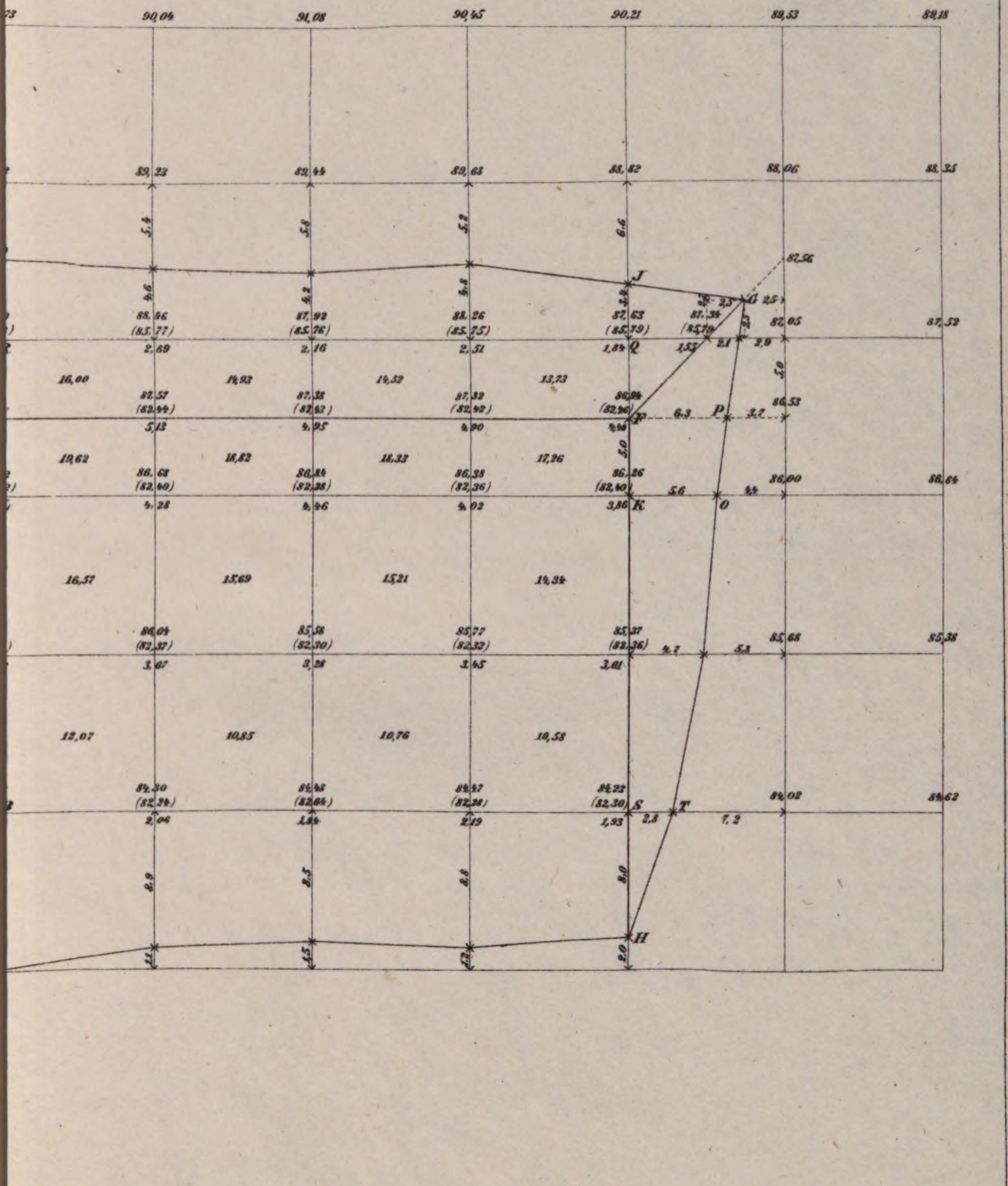


Fig. 43.


90,04
91,08
90,45
90,21
89,53
89,18
89,23
89,44
89,63
88,82
88,06
88,35
5,4
5,8
5,2
6,6
4,6
4,2
4,8
3,8
2,5
87,56
J
O
88,46
(85,77)
87,92
(85,76)
88,26
(85,75)
87,63
(85,79)
87,34
(85,78)
87,05
87,52
2,69
2,16
2,51
1,84
Q
1,55
2,1
2,9
16,00
14,93
14,52
13,73
5,0
87,57
(82,44)
87,38
(82,42)
87,32
(82,42)
86,94
(82,26)
86,53
P
6,3
3,2
5,13
4,95
4,90
4,29
5,0
19,62
18,82
18,33
17,26
86,68
(82,40)
86,84
(82,38)
86,38
(82,36)
86,26
(82,40)
86,00
86,64
5,6
4,4
4,28
4,46
4,02
3,86
K
O
16,57
15,69
15,21
14,34
86,04
(82,37)
85,58
(82,30)
85,77
(82,32)
85,37
(82,36)
85,68
85,38
4,7
5,3
3,67
3,28
3,45
3,01
12,07
10,85
10,76
10,58
84,30
(82,24)
84,48
(82,64)
84,47
(82,28)
84,23
(82,30)
84,02
84,62
S
T
2,8
7,2
2,06
1,84
2,19
1,93
8,9
8,5
8,6
8,0
H
1,1
1,5
1,2
2,0

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Dambrowski, Emanuel von

Theorie und Anleitung zur practischen Ausführung der rationellen Inhalts-Berechnung bei den Erdbauten, besonders der Eisenbahnen

Leipzig 1876

A.hydr. 467
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11330410-9